

Лекции 13-14. Диаграмма Вороного и скелет многоугольной фигуры

1. Скелетное представление фигуры

Описание фигуры перечислением замкнутых линий, определяющих контуры её границы, является наиболее естественным и простым. Явное описание границы фигуры даёт возможность решить многие задачи классификации фигур, возникающие при анализе формы изображений. Однако этот способ не является единственным и не всегда достаточным для анализа формы фигуры. Существуют различные практические задачи, в которых форма объекта складывается из отдельных протяженных элементов, имеющих вид «широких линий», штрихов и т.п. Примерами являются изображение текста, фигуры человека, узора папиллярных линий на пальце человека (рис.1.1).

Для анализа формы объектов такого класса граничное описание является

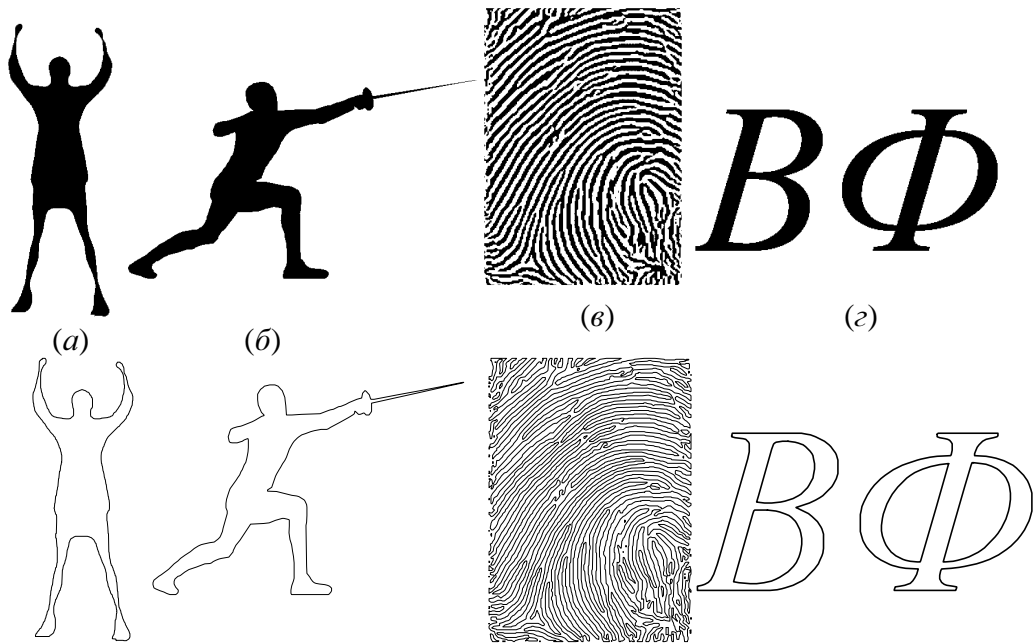


Рис.1.1. Фигуры и их граничные представления

недостаточно информативным. Например, аналитическое описание трёх замкнутых контуров границы фигуры, изображённой на рис.1г, не позволяет увидеть в этих контурах очертания буквы В и отличить его от трёх контуров, описывающих букву Ф. А для замкнутых контуров на рис. 1.1а,б очень непросто определить участки, описывающие руки изображенных людей. Граничное описание папиллярных линий в виде множества контуров на рис. 1.1в не позволяют анализировать особые точки этих линий: точки слияния папиллярных линий, их концевые точки и т.п. Поэтому для анализа формы подобных фигур возникает необходимость выбора другого, более тонкого способа их описания, который отражает как общую структуру объекта, так и более детальную структуру его элементов.

Таким способом описания фигуры в виде одномерных многообразий является плоский граф, называемый скелетом фигуры. Существует несколько различных определений скелета. Мы будем пользоваться определением, которое основывается на понятии максимального пустого круга.

Определение 1. Пустым кругом фигуры A называется замкнутое множество точек $\tilde{S}_r(p) = \{q : q \in R^2, d(p, q) \leq r\}$ такое, что $\tilde{S}_r(p) \subset A$.

Это множество представляет собой круг радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $p \in R^2$. Наряду с термином пустой круг мы будем использовать также в качестве синонима

термин *пустая окружность*, понимая под ним окружность, целиком лежащую в фигуре вместе со своими внутренними точками. В зависимости от контекста под окружностью будем понимать либо линию, либо замкнутую область, ограниченную этой линией.

Согласно определению 1, граничные точки фигуры не могут лежать внутри пустого круга. Именно в этом смысле он называется пустым – он не содержит в себе граничных точек фигуры.

Пустой круг целиком лежит в фигуре. Частным случаем пустого круга является любая точка фигуры $p \in A$, рассматриваемая как окружность нулевого радиуса $p = \tilde{S}_0(p)$. Такие пустые круги будем называть вырожденными.

Очевидно, что множество всех пустых кругов покрывает фигуру, а их объединение совпадает с этой фигурой.

На множестве пустых кругов естественным образом задаётся отношение частичного порядка: круг $\tilde{S}_r(p)$ больше круга $\tilde{S}_r(q) \succ \tilde{S}_i(q)$, если $\tilde{S}_i(q) \subset \tilde{S}_r(p)$, т.е. первый круг накрывает второй. Для такого отношения порядка существуют максимальные элементы, называемые максимальными пустыми кругами.

Определение 2. Максимальным пустым кругом называется пустой круг, который не содержится ни в каком другом пустом круге.

Максимальные пустые круги фигуры будем также называть *вписанными* кругами.

Если невырожденный пустой круг не имеет общих точек с границей фигуры (рис. 1.2а) или имеет всего одну общую точку (рис. 1.2б), то он не является максимальным,

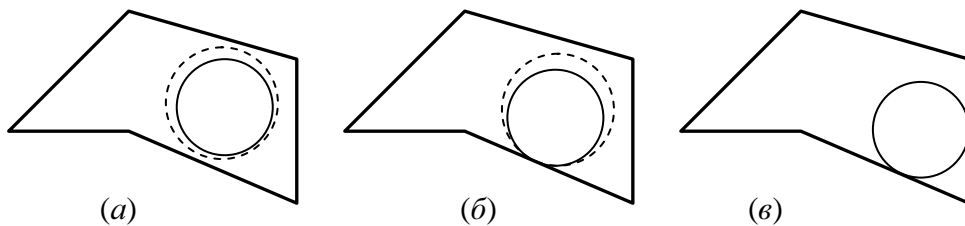


Рис. 1.2. Пустые круги фигуры

поскольку в этих случаях существуют другие пустые круги, его объемлющие. Поэтому для невырожденного максимального пустого круга характерно касание границы фигуры не менее чем в двух точках (рис. 1.2в). Вырожденные круги с центрами в выпуклых угловых вершинах фигуры являются максимальными пустыми кругами, поскольку не содержатся в других пустых кругах.

На рис. 1.3б представлены примеры максимальных пустых кругов. Круги A и B – вырожденные, они имеют нулевой радиус. Их центры – это точки излома границы

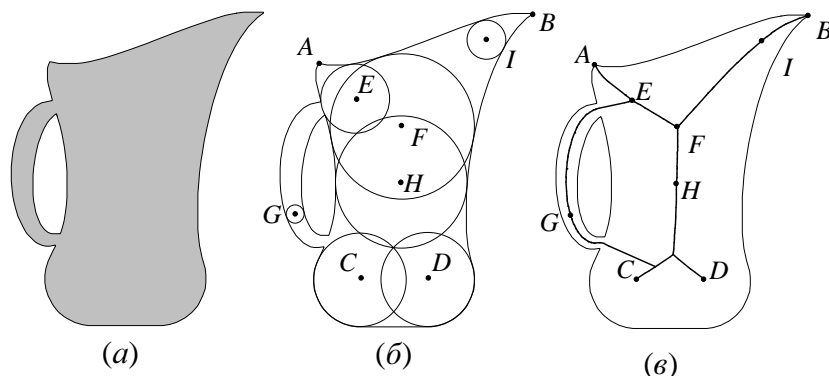


Рис. 1.3. (а) фигура и её граница, (б) примеры максимальных пустых кругов, (в) скелет фигуры.

фигуры. Круги C и D имеют с границей бесконечное множество общих точек, поскольку граница фигуры в данном примере содержит дуги окружностей. Круги E и F имеют по

три общих точки с границей фигуры. Остальные круги G , H , I касаются границы в двух точках.

Определение 3. *Скелетом* фигуры называется множество центров всех её максимальных пустых кругов.

Скелет можно рассматривать как плоский граф (рис. 1.3в), вершинами которого являются центры максимальных пустых кругов, имеющих либо одну общую точку с границей, либо три и более общих точки. А рёбра графа представляют собой линии, которые состоят из центров тех пустых кругов, которые касаются границы фигуры ровно в двух точках. По этой причине рёбра скелета называют также *серединными осями* фигуры.

Таким образом, скелет фигуры, как и её граница, является одномерным множеством точек. Но в отличие от границы это множество точек имеет более сложную структуру – это не набор замкнутых линий без самопересечений, а связный плоский граф.

Скелет является весьма удобным и информативным инструментом для анализа топологических и метрических свойств фигуры, для исследования её структуры. При этом он несёт информацию, которую достаточно сложно было бы извлечь из граничного описания фигуры. В примере на рис. 1.4 приведены скелеты фигур, изображенных на рис. 1.1. Как нетрудно увидеть, из скелетов человеческих фигур можно понять положение конечностей, жесты. Из скелета папиллярного узора легко выделить отдельные папиллярные линии, найти точки их соединения и концевые точки. Скелеты букв В и Ф имеют существенные топологические различия, в то время как контурные описания их топологически одинаковы (фигуры с двумя дырами).

Поскольку скелет конструируется на основании множества кругов, вписанных в фигуру, с каждой точкой скелета можно связать «ширину» фигуры в этой точке.

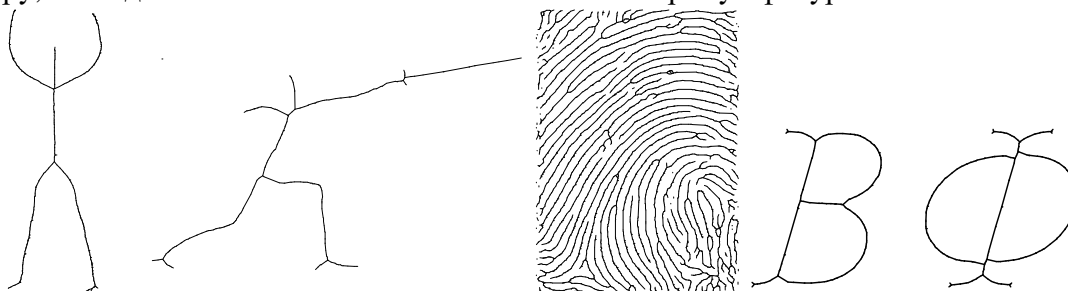


Рис. 1.4. Скелеты фигур

Определение 4. Будем называть *радиальной функцией* точки скелета величину радиуса максимального пустого круга с центром в этой точке.

Скелет фигуры вместе со своей радиальной функцией однозначно задаёт всё множество максимальных пустых кругов фигуры. А объединение этого множества кругов, как отмечалось выше, совпадает с самой фигурой. Таким образом, скелет с радиальной функцией является представлением фигуры, эквивалентным как её описанию с помощью индикаторной функции, так и граничному описанию.

Замечательные свойства скелетов обусловили широкое их применение для анализа формы изображений в распознавании образов, компьютерной графике и визуализации, сжатии видеoinформации и т.п.

2. Структура скелета многоугольной фигуры

Рассмотрим задачу скелетизации непрерывных фигур в практическом плане, имея в виду создание соответствующих эффективных алгоритмов. С этой точки зрения можно выделить важный класс фигур – многоугольные фигуры, для которых разработка эффективных алгоритмов скелетизации вполне возможна. Это объясняется тем, что ветви скелета многоугольной фигуры имеют простое аналитическое описание – это либо отрезки прямых линий, либо сегменты квадратичных парабол.

Пусть C – многоугольная фигура с границей ∂C , а S – её скелет. Общее число точек, составляющих множество S , бесконечно. Тем не менее, оказывается, что все эти точки лежат на конечном множестве отрезков прямых линий и квадратичных парабол. Пусть $s \in S$ – точка скелета, а g_1 и g_2 – две ближайшие к ней граничные точки фигуры, $g_1, g_2 \in \partial C$. Точки g_1 и g_2 могут занимать различное положение на границе фигуры. Каждая из них может быть вершиной многоугольника либо просто лежать на одной из его сторон. Будем называть такие точки соответственно угловыми, либо простыми. Возможны три варианта сочетания типов точек g_1 и g_2 : пара угловых, пара простых или пара из угловой и простой точек.

В случае, когда обе точки g_1 и g_2 угловые, скелетная точка s , равноудалённая от g_1 и g_2 , обязательно должна лежать на прямой, являющейся серединным перпендикуляром

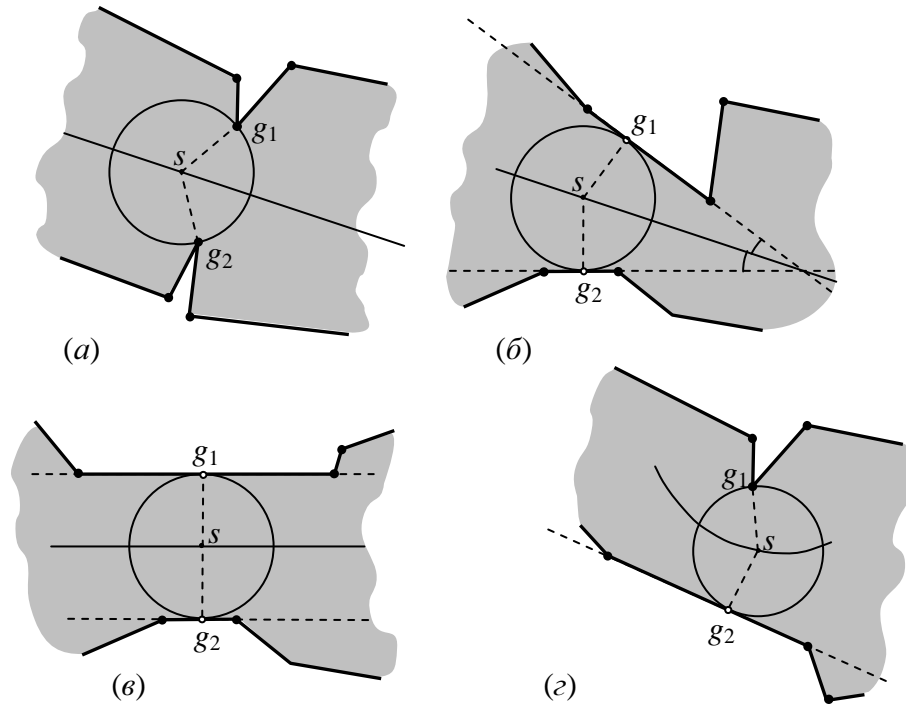


Рис.2.1. Элементы скелета многоугольной фигуры

для отрезка $[g_1, g_2]$ (рис.2.1a).

Если обе точки g_1 и g_2 простые, то точка s равноудалена от сторон многоугольников, содержащих g_1 и g_2 . Значит, точка s лежит на биссектрисе угла, образованного этими сторонами (рис.2.1б). Если же стороны параллельны, то s лежит на прямой линии, равноудалённой от этих сторон (рис.2.1в). Для общности можно считать, что эта прямая также является биссектрисой угла, образованного сторонами многоугольной фигуры.

Наконец в случае, когда пара g_1, g_2 состоит из угловой и простой точек, скелетная точка s равноудалена от угловой точки и от стороны многоугольника, содержащей простую точку. Это значит, что s лежит на параболе, для которой фокусом является угловая точка, а директрисой – сторона многоугольника, на которой лежит точка g_2 (рис.2.1з).

Таким образом, все скелетные точки должны лежать либо на биссектрисах углов, образованных сторонами многоугольной фигуры, либо на прямых, равноудалённых от пар вершин многоугольной фигуры, либо на параболах, определяемых парами «вершина-сторона» многоугольной фигуры. Поскольку число возможных пар «вершина-вершина», «сторона-сторона» и «вершина-сторона» конечно, то и число линий, определяющих ветви скелета, тоже конечно. Следовательно, задача вычисления скелета для многоугольной

фигуры сводится к комбинаторному перебору различных сочетаний сторон и вершин фигуры и вычислению соответствующих сегментов прямых линий и парабол, образующих серединные оси. Математической моделью для такого комбинаторного анализа является замечательная геометрическая конструкция, называемая диаграммой Вороного.

3. Диаграмма Вороного многоугольной фигуры

Понятие диаграммы Вороного в вычислительной геометрии первоначально использовалось применительно к конечным нерегулярным точечным множествам. Впоследствии понятие диаграммы Вороного было обобщено на более сложные объекты, содержащие бесконечное множество точек, в частности, на линейные сегменты. Обычные диаграммы Вороного мы рассматривали ранее. Применительно к задаче скелетизации многоугольной фигуры нас интересуют обобщённые диаграммы Вороного для конечного множества линейных отрезков, являющихся сторонами этой фигуры.

В силу универсальности понятия диаграммы Вороного для различных классов геометрических объектов сами эти объекты принято называть общим термином – *сайты*. Для обычной диаграммы Вороного сайтами являются изолированные точки, а для обобщённой диаграммы Вороного многоугольной фигуры сайтами являются стороны и вершины многоугольников, образующих границу фигуры.

Представим границу многоугольной фигуры в виде конечного множества элементов – её вершин и сторон. Под стороной многоугольной фигуры при этом понимается отрезок вместе с инцидентными ему вершинами. Рассмотрим эти вершины и стороны в качестве множества сайтов. Вершины многоугольной фигуры будем называть *сайтами-точками*, а стороны – *сайтами-сегментами*. Таким образом, сайт-сегмент и сайт-точка могут иметь непустое пересечение.

Определение 5. Сайт-сегмент и сайт-точка, имеющие непустое пересечение, называется *соседними сайтами*.

Для каждой внутренней точки многоугольной фигуры существует ближайшая к ней точка на границе фигуры. Через эту ближайшую граничную точку определим понятие ближайшего сайта для внутренней точки фигуры.

Определение 6. Сайт-точка является ближайшим сайтом для внутренней точки фигуры, если этот сайт является для неё ближайшей граничной точкой. Сайт-сегмент является ближайшим сайтом для внутренней точки фигуры, если ближайшая граничная точка лежит на этом сайте и является ортогональной проекцией внутренней точки на прямую, содержащую этот сайт.

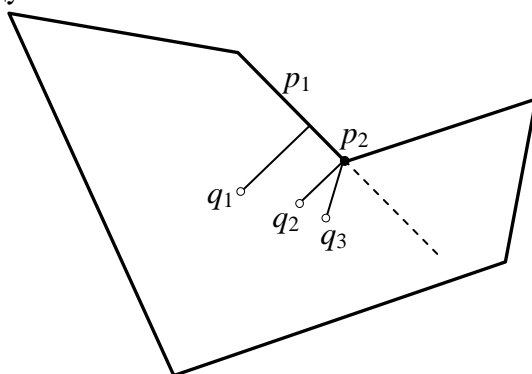


Рис.3.1. Определение ближайшего сайта для внутренней точки многоугольника.

На рис.3.1 приведен пример, поясняющий это определение. Изображены три внутренние точки многоугольной фигуры q_1 , q_2 и q_3 , а также два сайта: сайт-сегмент p_1 и сайт-точка p_2 . Для точки q_1 сайт p_1 является ближайшим. Для точки q_2 , у которой ближайшая точка границы является вершиной p_2 и к тому же ортогональной проекцией

q_2 на сайт p_1 , ближайшими будут сразу два сайта: p_1 и p_2 . А для точки q_3 ближайшим является сайт p_2 .

Определение 7. Ячейкой Вороного сайта называется геометрическое место точек фигуры, для которых этот сайт является ближайшим.

Очевидно, что ячейки Вороного образуют покрытие многоугольной фигуры, поскольку для каждой точки фигуры имеется ближайший сайт. При этом ячейки уже не обязательно являются выпуклыми многоугольниками, как в случае, когда сайтами были только изолированные точки. В примере на рис.3.2 ячейки сайтов 1, 3, 5, 9, 13 не выпуклые, а большинство ячеек (все кроме 7, 11 и 15) вообще не являются многоугольниками, так как имеют в границе параболические фрагменты. На рис.3.2 и последующих рисунках сайты-точки изображены в виде кружков, сайты-сегменты – отрезков.

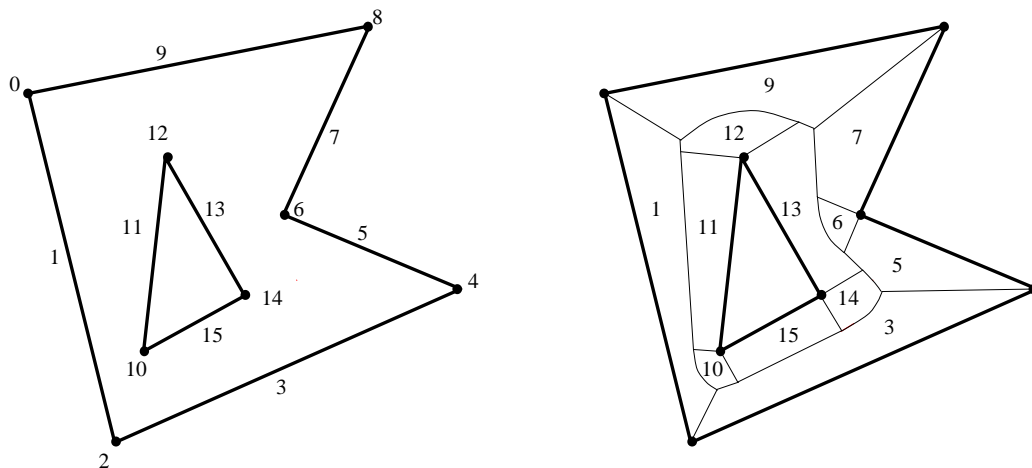


Рис.3.2. Сайты и ячейки Вороного многоугольной фигуры

Часть границ ячеек Вороного составляют сами сайты-сегменты – стороны многоугольной фигуры. Остальные границы ячеек состоят из отрезков прямых и парабол, равноудалённых от разных пар сайтов.

Определение 8. Сайты называются *смежными*, если их ячейки Вороного имеют общую невырожденную границу (т.е. имеют более одной общей граничной точки).

Общая граница ячеек Вороного двух сайтов состоит из точек, для которых эти сайты являются ближайшими и равноудалёнными. Это значит, что определение 8 эквивалентно следующему. Сайты являются смежными, если существует пустая окружность, касающаяся только этих двух сайтов.

Определение 9. Бисектором пары сайтов называется линия, являющаяся общей границей двух смежных ячеек Вороного этих сайтов.

Определение 10. Диаграммой Вороного многоугольной фигуры называется объединение бисекторов всех её сайтов.

Диаграмма Вороного представляет собой плоский граф. Ребрами графа являются бисекторы, а вершинами – концевые точки бисекторов. Концевые точки могут быть двух видов. Точки, имеющие как вершины графа степень 1, лежат на границе многоугольной фигуры. Остальные концевые точки имеют степень 3 и более, т.е. в них сходятся по три и более бисекторов. Каждая такая вершина диаграммы Вороного равноудалена от трёх или более сайтов, которые, в свою очередь, являются к ней ближайшими. Следовательно, эта вершина является центром максимального пустого круга, касающегося трёх или более сайтов.

4. Получение скелета из диаграммы Вороного

Между диаграммой Вороного многоугольной фигуры и её скелетом существует тесная связь.

Утверждение 1. Скелет многоугольной фигуры является подмножеством её диаграммы Вороного.

Доказательство. Пусть в фигуре S с границей ∂S для точки s из скелета S имеются две ближайшие граничные точки g_1 и g_2 . Тогда сайты, содержащие эти точки, имеют общий бисектор и точка s лежит в этом бисекторе, откуда следует утверждение.

Утверждение 2. Бисектор пары сайтов, не являющихся соседними, содержится в скелете многоугольной фигуры.

Доказательство. Если два сайта являются смежными, то для каждой точки бисектора существует пустой круг с центром в этой точке, касающийся обоих сайтов. Поскольку при этом сами сайты не являются соседними, точки касания сайтов пустым кругом не совпадают друг с другом. Следовательно, эта точка бисектора имеет две ближайшие точки на границе, и поэтому пустой круг является максимальным. Но тогда данная точка принадлежит скелету, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Бисектор пары соседних сайтов не содержится в скелете многоугольной фигуры.

Доказательство. Пара соседних сайтов – это сайт-точка и сайт-сегмент, образованные вершиной многоугольника и инцидентной ей стороной многоугольника. Бисектор такой пары сайтов состоит из точек фигуры, равноудалённых от этих сайтов. Но при этом ближайшей точкой границы многоугольника к точкам бисектора является только сама вершина, принадлежащая обоим сайтам, т.е. единственная точка. Следовательно, пустые круги с центрами на этом бисекторе не являются максимальными. Поэтому бисектор не входит в скелет многоугольника.

Таким образом, картина взаимосвязи диаграммы Вороного многоугольной фигуры и её скелета полностью проясняется. Все бисекторы пар сайтов, не являющихся соседними, образуют ветви скелета, и только они. На основе этого свойства появляется возможность получения скелета из диаграммы Вороного многоугольной фигуры. Если диаграмма Вороного построена, то нужно просто выбросить из неё «лишние» элементы: рёбра, являющиеся бисекторами пар соседних сайтов. Тогда оставшиеся рёбра образуют скелет фигуры.

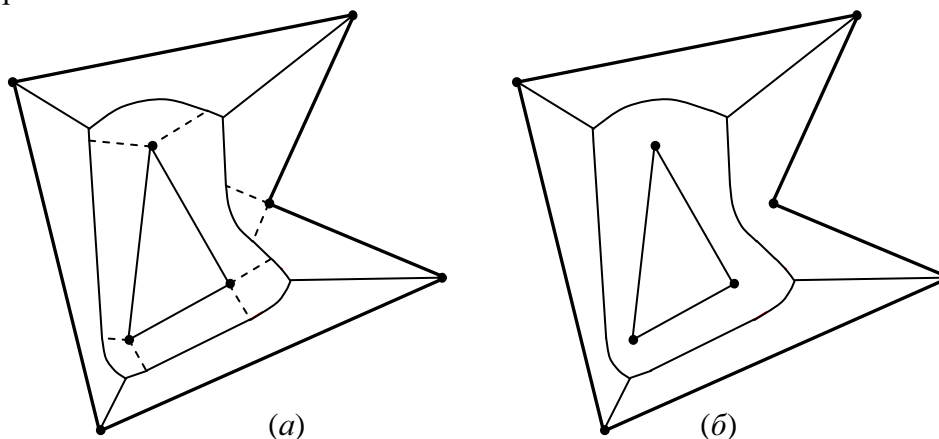


Рис.4.1. Получение скелета из диаграммы Вороного: (а) скелет фигуры, (б) диаграмма Вороного.

Для определения лишних рёбер имеется простой признак: лишними являются бисекторы, проходящие через вогнутые вершины фигуры, т.е. такие, в которых угол между сторонами больше 180° . В примере на рис.4.1 таковыми являются вершины 6, 10, 12 и 14.

В примере на рис.4.1а показана диаграмма Вороного многоугольной фигуры. Бисекторы пар соседних сайтов в ней выделены пунктиром. На рис.4.1б изображен скелет многоугольной фигуры, образовавшийся в результате удаления этих лишних бисекторов. Каждый бисектор пары соседних сайтов имеет хотя бы одну концевую вершину первой

степени. При его удалении эта вершина исчезает, а степень второй концевой вершины бисектора понижается. Таким образом, скелет является подграфом диаграммы Вороного, в котором могут появиться, в частности, вершины второй степени, которых нет в диаграмме Вороного.

5. Вершины диаграммы Вороного

Структура диаграммы Вороного многоугольной фигуры полностью описывается плоским графом, ребрами которого являются бисекторы пар сайтов, а вершинами – точки пересечения этих бисекторов. Поэтому для построения диаграммы Вороного нужны вычислить бисекторы и точки их пересечения.

Каждая вершина диаграммы Вороного является центром максимальной пустой окружности, касающейся трёх или более сайтов. Поэтому задача поиска вершин может быть решена путем построения касательных окружностей для троек сайтов (рис.5.1).

В общем случае для произвольной комбинации из трёх сайтов не всегда существует

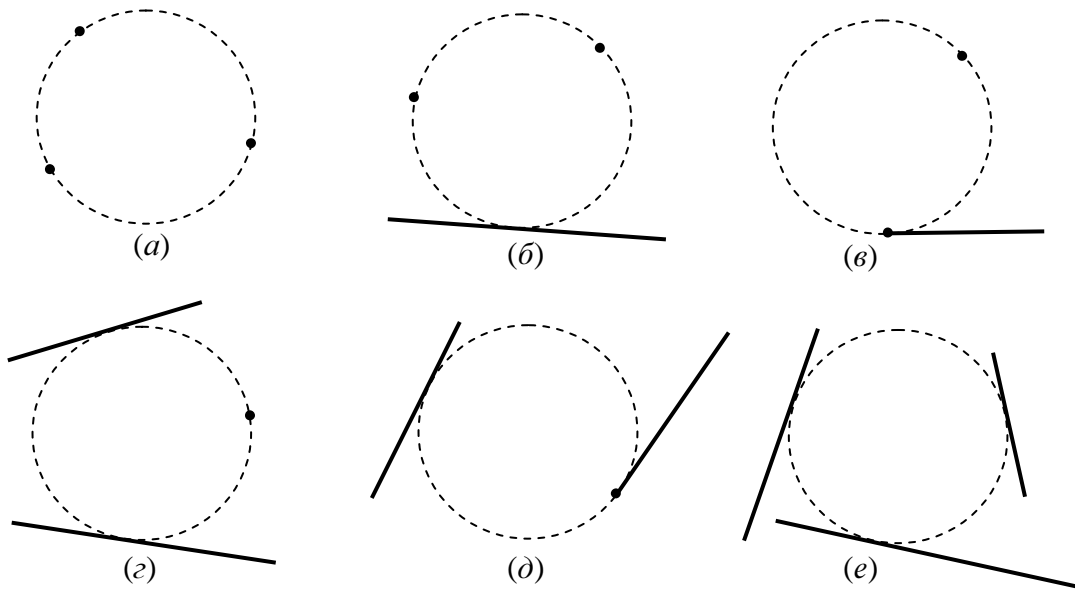


Рис.5.1. Касательные окружности для троек сайтов

касательная пустая окружность. На рис.5.1 приведены примеры троек сайтов, когда такая окружность существует, а на рисунке 5.2 – когда не существует.

Если касательная окружность существует, то она не всегда является единственной. На рис.5.3 приведены примеры, когда существуют две пустые окружности, касательные к одной и той же тройке сайтов. Однако в этом случае окружности различаются последовательностью касания сайтов. При обходе окружностей в положительном

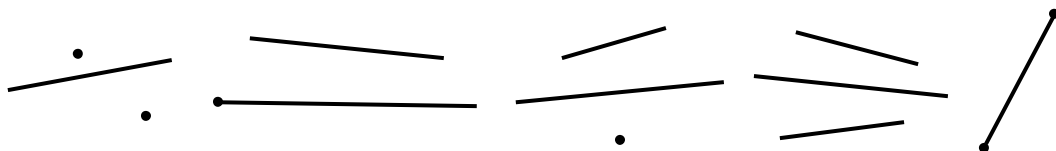


Рис.5.2. Тройки сайтов, для которых не существует касательной окружности

направлении (против часовой стрелки) тройка сайтов упорядочивается по-разному.

Таким образом, для каждой упорядоченной тройки сайтов существует не более одного пустого круга, касающегося сайтов в заданном порядке.

Построение касательной окружности для тройки сайтов может быть сведено к решению системы из двух уравнений второй степени.

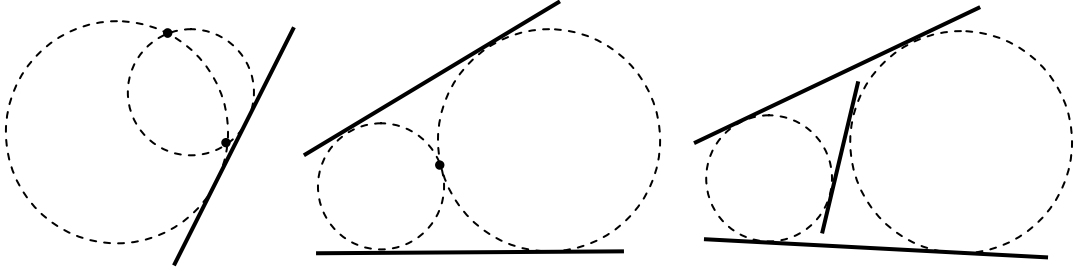


Рис.5.3. Случаи, когда касательная окружность не единственна

Пусть $t = (x, y)$ точка на плоскости, являющаяся центром окружности.

Если $p = (p_x, p_y)$ – сайт-точка, то расстояние от точки t до этого сайта есть

$$d(t, p) = \sqrt{(x - p_x)^2 + (y - p_y)^2}.$$

Рассмотрим теперь сайт-сегмент s с концевыми точками $q = (q_x, q_y)$ и $r = (r_x, r_y)$. Сайт s определяет прямую на плоскости, описываемую линейным уравнением $ax + by + c = 0$ с коэффициентами

$$a = -\frac{(r_y - q_y)}{\sqrt{(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2}}, \quad b = \frac{(r_x - q_x)}{\sqrt{(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2}}, \quad c = \frac{(r_y q_x - r_x q_y)}{\sqrt{(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2}}.$$

Расстояние от точки t до этой прямой есть $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. В нашем случае $a^2 + b^2 = 1$.

Кроме того, точки, лежащие слева от прямой $ax + by + c = 0$, удовлетворяют условию $ax + by + c > 0$. Таким образом, если окружность с центром в точке t касается сайта-сегмента и лежит слева от него, то расстояние от точки t до сайта равно $d(t, s) = ax + by + c$.

Если точка t является центром касательной окружности трёх сайтов s_1, s_2, s_3 , то эти сайты являются для неё равноудалёнными и ближайшими. Следовательно, имеет место равенство

$$d(t, s_1) = d(t, s_2) = d(t, s_3).$$

Эти условия задают алгебраическую систему из двух уравнений, решение которой позволяет найти координаты центра окружности $t = (x, y)$, касательной к трём сайтам s_1, s_2, s_3 :

$$\begin{cases} d(t, s_1) = d(t, s_2) \\ d(t, s_1) = d(t, s_3) \end{cases} \quad (5.1)$$

Если оба сайта, входящие в одно из уравнений, являются точками, то это уравнение приводится к линейному. Действительно, пусть s_1, s_2 – это сайты-точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Тогда $d(t, s_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, $d(t, s_2) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$. Возведя правую и левую части равенства в квадрат, это уравнение сводим к следующему линейному уравнению относительно неизвестных x и y :

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2.$$

Если оба сайта s_1, s_2 являются сайтами-сегментами, тогда уравнение тоже сводится к линейному. Это происходит потому, что расстояние от точки $t = (x, y)$ до этих сайтов-сегментов описывается, как было показано выше, линейными функциями

$d(t, s_1) = a_1x + b_1y + c_1$ и $d(t, s_2) = a_2x + b_2y + c_2$. Следовательно, равенство этих расстояний даёт нам уравнение $(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y = -(c_2 - c_1)$.

Таким образом, если в тройке сайтов s_1, s_2, s_3 все они являются сайтами-точками или все являются сайтами-сегментами, то (5.1) превращается в систему двух линейных уравнений.

Если в тройке сайтов s_1, s_2, s_3 присутствуют одновременно сайты-точки и сайты-сегменты, то система становится нелинейной. Однако поскольку из трёх сайтов всегда найдётся либо одна пара сайтов-точек, либо пара сайтов-сегментов, то одно из уравнений в системе (5.1) становится линейным. Другое уравнение приводится к уравнению второй степени. Пусть, например, s_1 сайт-точка с координатами (x_1, y_1) а s_2 - сайт-сегмент с концевыми точками $q = (q_x, q_y)$ и $r = (r_x, r_y)$. Тогда, приравнявая расстояния от точки

$t = (x, y)$ до этих сайтов, получаем уравнение $ax + by + c = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$. Возведя обе его части во вторую степень, и сделав замену переменных на основании второго уравнения, являющегося линейным, это уравнение можно привести к обычному квадратному уравнению, которое легко решается.

Таким образом, мы всегда можем найти решение системы (5.1), которое, однако, нуждается в дополнительном исследовании.

Полученное решение должно удовлетворять двум дополнительным условиям, которые легко проверяются. Первое условие состоит в том, что проекции найденной точки t на сайты-сегменты должны лежать на самих сегментах. Для сегмента с концевыми точками $q = (q_x, q_y)$ и $r = (r_x, r_y)$ это условие есть:

$$0 \leq (x - q_x)(r_x - q_x) + (y - q_y)(r_y - q_y) \leq (r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2. \quad (5.2)$$

Второе условие выражается в том, что касательная окружность должна лежать внутри фигуры и, следовательно, центр её $t = (x, y)$ лежит слева от сайта-сегмента. Это условие выражается следующим образом:

$$(x - q_x)(r_y - q_y) - (y - q_y)(r_x - q_x) \leq 0. \quad (5.3)$$

Проверка условий (5.2)-(5.3) необходима, поскольку, во-первых, система (5.1) описывает касание не самих сайтов-сегментов, а содержащих их прямых, а во-вторых, при возведении уравнений во вторую степень могут появиться ложные решения.

После проверки выполнения этих условий для найденных решений системы уравнений (5.1) окажется, что допустимых решений либо вообще нет, либо существует лишь одно. В первом случае это означает, что имеет место какая-либо из ситуаций, изображенных на рис.5.2, т.е. касательную окружность к тройке сайтов s_1, s_2, s_3 построить нельзя. А во втором случае имеет место один из вариантов, представленных на рис.5.1 и тогда центр касательной окружности найден. Для того чтобы понять, является ли полученная точка вершиной диаграммы Вороного, остаётся проверить, не попадают ли внутрь касательной окружности другие сайты, т.е. является ли соответствующая окружность пустой. Если попадают, то эта окружность не пустая и тогда её центр не является вершиной диаграммы Вороного. А если не попадают, то центр этой окружности объявляется очередной найденной вершиной диаграммы Вороного. Проверка попадания остальных сайтов в окружность осуществляется на основе перебора.

Заметим, что описанная схема вычисления вершин диаграммы Вороного является весьма затратной в вычислительном отношении. Перебор всех троек сайтов имеет сложность $O(n^3)$, да ещё проверка пустоты полученных окружностей увеличивает эту оценку до $O(n^4)$.

6. Бисекторы диаграммы Вороного

Бисектор является линией, разделяющей смежные ячейки Вороного двух сайтов. Будем называть эти сайты *определяющими сайтами* бисектора. В зависимости от типа определяющих сайтов бисектор является либо отрезком прямой линии, либо сегментом параболы. Концевые точки бисектора – это вершины диаграммы Вороного, являющиеся центрами максимальных пустых окружностей, которые касаются трёх или более сайтов.

Пусть точки C_1 и C_2 являются концевыми точками некоторого бисектора. Если пара определяющих сайтов состоит из двух сайтов-точек или из двух сайтов-сегментов, то бисектор является прямолинейным отрезком с концами в точках C_1 и C_2 . Вектор $\overline{C_1C_2}$ является направляющим для прямой, а отрезок бисектора задается параметрическим уравнением

$$V(t) = C_1 + t \cdot \overline{C_1C_2}, \quad (6.1)$$

в котором параметр t пробегает значения $t \in [0,1]$.

Если же один из определяющих сайтов есть сайт-точка, а другой – сайт-сегмент, то бисектор является параболой. Пусть S – это сайт-точка, а Q – сайт-сегмент. Пусть P_1 и P_2 – проекции точек C_1 и C_2 на сайт Q , т.е. это точки касания сайта Q максимальными пустыми окружностями C_1 и C_2 . Не нарушая общности, можем считать, что точки S , P_1 , P_2 образуют «правую тройку», т.е. угол между векторами $\overline{SP_1}$ и $\overline{SP_2}$ положительный (рис.6.1). Геометрическим местом точек, равноудалённых от точки S и прямой Q , является парабола, у которой S есть фокус, а Q – директриса.

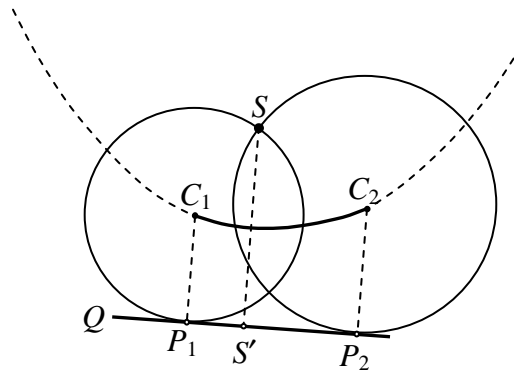


Рис.6.1. Параболический бисектор для пары сайтов «точка-сегмент»

Пусть S' – проекция точки S на прямую Q . Точки P_1 и P_2 лежат на прямой Q . Введем местную прямоугольную декартову систему координат (u, v) следующим образом. В качестве начала координат примем S' , ось абсцисс направим вдоль прямой Q в направлении $\overline{P_1P_2}$, а ось ординат – в направлении $\overline{S'S}$. Уравнение сегмента параболы в этой системе координат есть

$$v = \frac{d}{2} + \frac{1}{2d}u^2, \quad u \in [u_1, u_2], \quad (6.2)$$

где

$$d = |S'S| = \frac{|\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1S}|}{|\overline{P_1P_2}|}, \quad (6.3)$$

$$u_1 = -\frac{(\overline{P_1S}, \overline{P_1P_2})}{|\overline{P_1P_2}|}, \quad (6.4)$$

$$u_2 = -\frac{(P_2S, P_1P_2)}{|P_1P_2|}. \quad (6.5)$$

Обозначим \bar{e}_u и \bar{e}_v – единичные векторы выбранной системы координат (u, v) :

$$\bar{e}_u = \frac{1}{|P_1P_2|} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \bar{e}_v = \frac{1}{|S'S|} \cdot \overrightarrow{S'S}.$$

Тогда уравнение параболического бисектора в основной системе координат примет вид

$$V(u) = S' + u \cdot \bar{e}_u + \left(\frac{d}{2} + \frac{1}{2d} u^2 \right) \cdot \bar{e}_v, \quad u \in [u_1, u_2]. \quad (6.6)$$

При этом $V(u_1) = C_1, V(u_2) = C_2$.

Таким образом, уравнения (6.1) и (6.2)-(6.6) полностью описывают линейные и параболические бисекторы диаграммы Вороного многоугольной фигуры.

7. Жадный алгоритм построения диаграммы Вороного

Если многоугольная фигура имеет n вершин, то она имеет n сторон и из них образуется $2n$ сайтов. Получается $4n^2$ пар сайтов, для которых принципиально могут существовать бисекторы. Но среди этого количества пар сайтов на самом деле смежными являются лишь небольшая часть пар, составляющая величину $O(n)$. Поэтому возникает задача отбора смежных пар сайтов из множества всех возможных пар. Решив задачу отбора таких пар и вычислив их бисекторы, можно построить диаграмму Вороного для множества сайтов многоугольной фигуры.

Как уже отмечалось, наивный переборный алгоритм построения вершин диаграммы Вороного, описанный выше, имеет слишком большую вычислительную сложность. Для построения скелетов бинарных изображений в практических приложениях нужны более эффективные алгоритмы. Рассмотрим такой алгоритм, основанный на последовательном нахождении всех вершин и рёбер диаграммы Вороного. Поскольку диаграмма Вороного многоугольной фигуры является связным графом, этот процесс может быть реализован путем последовательного присоединения к уже построенной части диаграммы новых её элементов – рёбер и вершин.

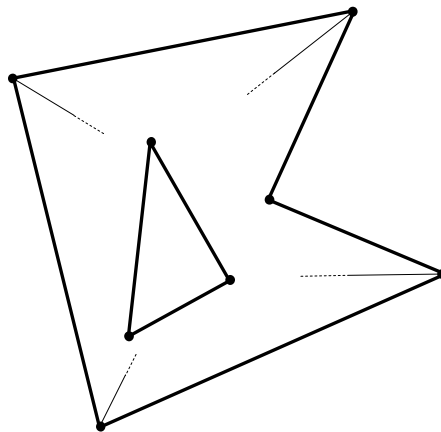


Рис.7.1. Терминальные бисекторы диаграммы Вороного

Начинается этот процесс с выявления всех терминальных вершин диаграммы Вороного, имеющих степень 1. Таковыми являются все выпуклые вершины многоугольной фигуры. Действительно, с каждой выпуклой вершиной связана пара сайтов-сегментов, образованных сторонами многоугольной фигуры, инцидентными этой её вершине. А биссектриса угла, образованного такой парой сегментов всегда задает

бисектор, для которого вершина фигуры является концевой точкой. Этот бисектор является отрезком прямой. Таким образом, для всех вершин диаграммы первой степени существуют инцидентные им бисекторы, которые инициализируют процесс построения диаграммы (рис.7.1). Будем называть такие бисекторы *терминальными*.

Вершины бисекторов будем искать последовательно: сначала находим первую концевую точку бисектора, а затем вторую. Бисектор, для которого вычислена лишь одна концевая точка, будем называть *активным*. А те бисекторы, у которых известны обе концевые точки, будем называть *готовыми*. В процессе построения диаграммы Вороного создаются два списка: список активных бисекторов и список готовых бисекторов.

Работа алгоритма начинается с нахождения первой концевой точки одного из терминальных бисекторов. Такой точкой является любая из выпуклых вершин многоугольной фигуры (рис.7.1). Очевидно, что такая вершина всегда существует (и не одна). Первый найденный бисектор является активным. Он помещается в список активных бисекторов, после чего начинается основной цикл алгоритма. Основным циклом является обработка очередного активного бисектора, в результате которой для него находится вторая концевая точка, после чего он переводится в список готовых бисекторов. Найденная вторая концевая точка бисектора является либо терминальной вершиной диаграммы Вороного, либо начальной точкой для других бисекторов. В этом последнем случае порождаются новые бисекторы, которые пополняют список активных. Цикл завершается, когда список активных бисекторов опустеет.

Таким образом, основной алгоритм построения диаграммы Вороного состоит в последовательном порождении и обработке бисекторов и включает в себя следующие шаги.

1). Выбрать очередной бисектор из списка активных бисекторов и перейти к шагу 2. Если этот список пуст, то завершить работу.

2). Построение второй концевой точки бисектора. Для выбранного активного бисектора найти вторую концевую точку. Найденный бисектор рассматривается в качестве кандидата для включения в диаграмму Вороного. Перейти к шагу 3.

3). Пополнение диаграммы новым бисектором. Полученный новый бисектор нужно проверить на совпадение с ранее построенными бисекторами, находящимися в списке готовых. Если совпадения не обнаружено, то новый бисектор помещается в список готовых, и далее переход к шагу 4. Если же бисектор-кандидат совпал с каким-то из построенных ранее готовых бисекторов, то он просто уничтожается и далее нужно перейти к шагу 1.

4). Порождение активных бисекторов. Найденная вторая концевая точка бисектора объявляется вершиной диаграммы Вороного. Если она не совпадает с вершиной многоугольной фигуры, т.е. не является терминальной вершиной диаграммы Вороного, то из неё должны выходить другие рёбра диаграммы. Это значит, что нужно создать новые активные бисекторы, для которых эта вершина является первой концевой точкой, и поместить их в список активных бисекторов. Далее перейти к шагу 1.

Рассмотрим шаги алгоритма более подробно.

7.1. Построение второй концевой точки бисектора

Активный бисектор описывается парой своих определяющих сайтов и первой концевой точкой. Кроме того, известна ориентация бисектора относительно сайтов, т.е. известно, какой из определяющих сайтов лежит слева от бисектора, а какой справа. Искомая вторая концевая точка является центром пустой окружности, касательной к двум определяющим сайтам и некоторому третьему неизвестному сайту. Следовательно, построение этой второй концевой точки сводится к поиску соответствующего третьего сайта. Такой поиск можно осуществить последовательным просмотром всех сайтов и выбором среди них того, который требуется. Для каждого пробного сайта и пары определяющих сайтов делается попытка построения общей касательной окружности.

Причём ищется такая окружность, которая касается трёх сайтов в определённом порядке. Точки касания левого, правого определяющих сайтов и пробного сайта должны образовывать правую тройку (рис.7.2). Если такую окружность построить удалось, то её центр может рассматриваться как потенциальная вторая концевая точка бисектора.

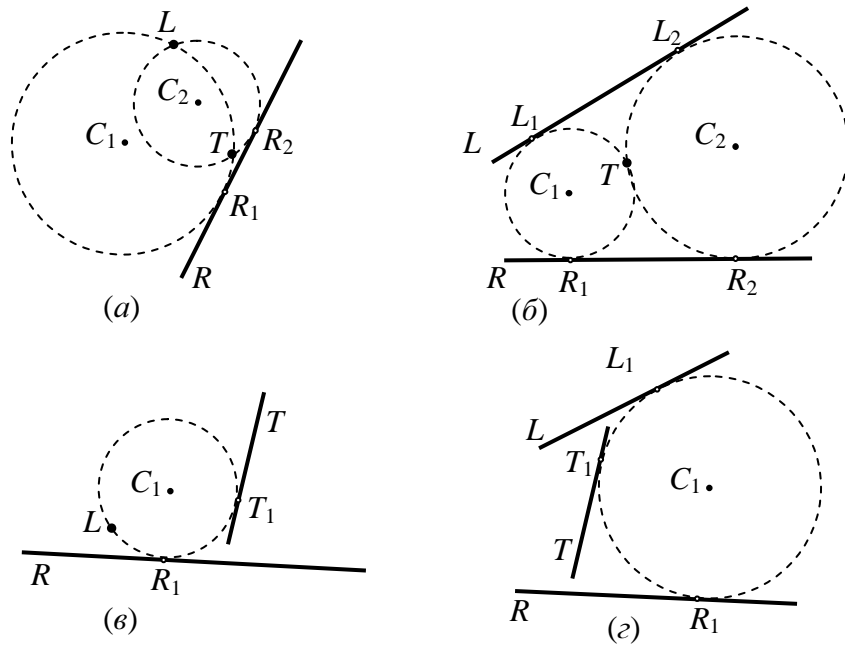


Рис.7.2. Построение касательной окружности

Пример на рис.7.2 иллюстрирует некоторые частные случаи, которые могут возникнуть при решении этой задачи. В примерах (а,б) для определяющих сайтов L (левый) и R (правый) и пробного сайта T существуют две касательные окружности. Но ориентация точек касания для этих окружностей разная. В случае (а) тройка точек (L, R_1, T) является правой, а тройка (L, R_2, T) – левой. Поэтому в качестве касательной окружности выбираем C_1 . А в случае (б) тройка (L_1, R_1, T) является правой, а тройка (L_2, R_2, T) – левой. Здесь тоже искомой касательной окружностью будет C_1 . Для случая (в) существует единственная касательная окружность C_1 к тройке сайтов L , R и T . При этом тройка точек касания (L, R_1, T_1) является правой. Следовательно, окружность C_1 удовлетворяет требуемым условиям. А в случае (г) единственная касательная окружность к сайтам L , R и T , которую можно построить, не может быть выбрана, поскольку тройка точек касания (L_1, R_1, T_1) не является правой.

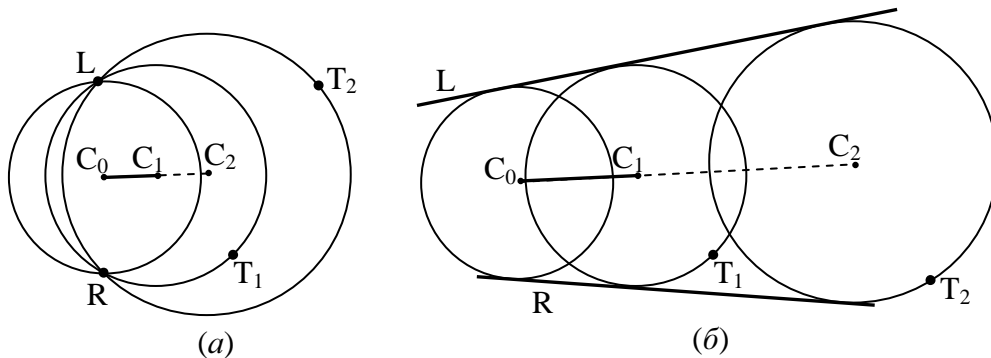


Рис.7.3. Выбор концевой точки для линейного бисектора

Бисектор строится для пары сайтов. А его концевая точка определяется как центр пустого круга, касательного к этой паре сайтов и некоторому третьему сайту, который нужно найти. Однако в ходе просмотра всех сайтов может быть выявлено несколько таких

кандидатов в «третьи» сайты, для которых удаётся построить пустой касательный круг (рис.7.3-7.4). Какой из этих сайтов следует выбрать?

Такой выбор должен осуществляться из следующих соображений. Все центры построенных окружностей лежат на линии, равноудалённой от двух определяющих сайтов. Поэтому в качестве второй концевой точки бисектора следует взять центр той окружности, который находится ближе вдоль этой линии к первой концевой точке. В случае, когда пара определяющих сайтов состоит из двух сайтов-точек или двух сайтов-сегментов, выбирается просто та точка, которая ближе к первой концевой (рис.7.3). На рисунке первая концевая точка бисектора обозначена C_0 . Среди двух точек C_1 и C_2 , являющихся кандидатами для выбора второй концевой точки бисектора, нужно выбрать C_1 , поскольку она лежит ближе к C_0 , чем C_2 . В результате бисектором становится отрезок прямой C_0C_1 .

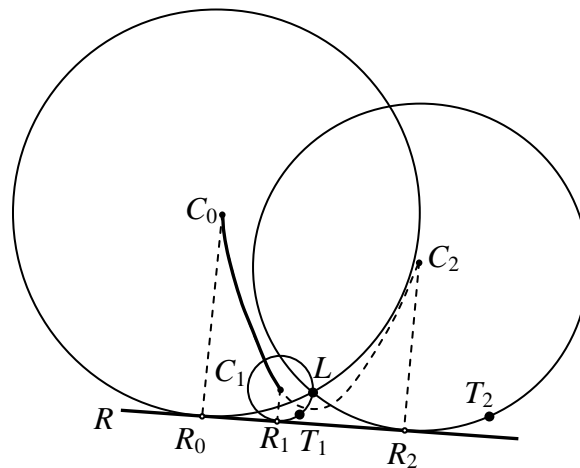


Рис.7.4. Выбор концевой точки для параболического бисектора

Более сложным представляется случай, когда пара определяющих сайтов состоит из сайта-точки и сайта-сегмента (рис.7.4). В этом случае в качестве второй концевой точки выбирается та, у которой проекция на сайт-сегмент лежит ближе остальных к проекции первой концевой точки на этот сайт-сегмент. В примере на рисунке в качестве пробных сайтов выступают сайты T_1 и T_2 . Центры соответствующих касательных кругов C_1 и C_2 лежат на параболе. При этом расстояние от первой концевой точки бисектора C_0 до C_2 может быть меньше, чем до C_1 . Однако если рассмотреть проекции точек C_0 , C_1 и C_2 на сайт-сегмент R (точки R_0 , R_1 и R_2 соответственно), то выяснится, что длина отрезка R_0R_1 меньше чем R_0R_2 . Поэтому в качестве второй концевой точки бисектора выбирается C_1 , и сам бисектор будет представлять собой сегмент параболы C_0C_1 .

7.2. Пополнение диаграммы новым бисектором

Полученный новый бисектор должен быть включен в список готовых. Однако существует опасность, что такой бисектор был уже построен ранее и содержится в списке готовых. Механизм возможного повторного построения бисектора объясняется следующим образом. Поскольку бисектор имеет две концевые точки, являющиеся вершинами диаграммы Вороного, он может быть построен с двух сторон. Всё зависит от того, какая из его концевых точек была найдена раньше. Поэтому вполне возможен случай, когда в ходе построения диаграммы могут возникнуть независимо два активных бисектора, у которых первыми концевыми точками являются две смежные вершины диаграммы Вороного.

Для того чтобы избежать повторного включения в диаграмму одного и того же готового бисектора, необходимо осуществить проверку вновь полученного бисектора на

совпадение его с каким-либо готовым бисектором. Такая проверка осуществляется простым перебором списка готовых бисекторов и сравнения их с вновь полученным бисектором-кандидатом. В случае, когда совпадения не произошло, новый бисектор пополняет список готовых. Если же произошло совпадение, то бисектор-кандидат просто уничтожается.

7.3. Порождение активных бисекторов

В диаграмме Вороного все вершины имеют степень либо 1, либо 3 и более. В случае если найденная вторая концевая точка бисектора имеет степень 1, это означает, что она является терминальной вершиной диаграммы. Терминальная вершина совпадает с выпуклой вершиной многоугольной фигуры. Если же точка не является терминальной, то в ней сходятся несколько бисекторов. Следовательно, найденная вторая концевая точка бисектора может служить начальной точкой для порождения новых активных бисекторов.

Порождение новых бисекторов осуществляется по следующему правилу. Пусть построенный готовый бисектор имеет концевую точку C , являющуюся центром окружности, касательной к сайтам L, R, T . Сайты L и R являются соответственно левым и правым определяющими сайтами бисектора, а сайт T найден в результате просмотра всех пробных сайтов так, как это описано выше. Тогда осуществляется следующая проверка. Если сайты L и R являются соседними, то вершина C объявляется терминальной. В противном случае порождаются два новых активных бисектора. Первый из них имеет определяющие сайты L и T , а второй – T и R . Левым определяющим сайтом первого бисектора является L , а правым – T . Для второго бисектора левым является T , а правым R . Оба бисектора имеют одну и ту же первую концевую точку C .

При поиске второй концевой точки может возникнуть особый случай, когда найдется несколько пробных сайтов T_1, \dots, T_m , $m > 1$, у которых центры касательных окружностей совпадут. Это означает, что существует максимальная пустая окружность, касающаяся двух определяющих сайтов и всех этих пробных сайтов. Следовательно, найденная вершина диаграммы Вороного является точкой, в которой сходятся ячейки Вороного всех этих сайтов. Эта ситуация является вполне допустимой и не нарушает работу алгоритма. Упорядочим сайты T_1, \dots, T_m в последовательности касания их пустой окружностью от L к R . А затем образуем $m+1$ новых бисекторов-кандидатов для следующих пар сайтов: L и T_1 , T_1 и T_2 , ..., T_{m-1} и T_m , T_m и R .

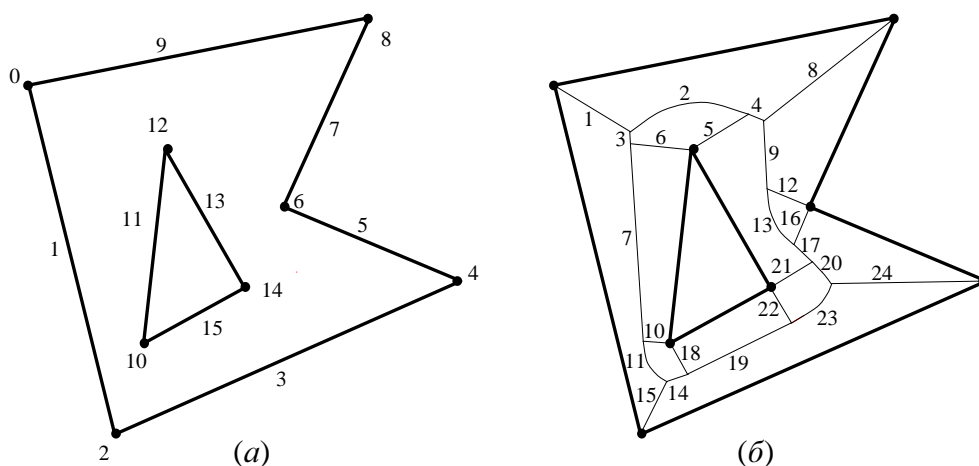


Рис.7.5. Пример работы алгоритма построения диаграммы Вороного (см.таблицу 7.1)

Для иллюстрации работы описанного алгоритма рассмотрим в качестве примера построение диаграммы Вороного многоугольной фигуры, изображенной на рис.7.5а. Последовательность построения представлена в таблице 7.1. Нумерация сайтов дана в

соответствии с рис.7.5а. На рис.7.5б бисекторы диаграммы Вороного пронумерованы в соответствии с нумерацией шагов в таблице.

В таблице используются следующие обозначения. Запись (l, r) обозначает бисектор с левым определяющим сайтом l и правым r . Запись $\{i, j, k\}$ обозначает вершину диаграммы Вороного, являющуюся центром касательной окружности сайтов i, j, k . При этом точки касания образуют правую тройку. Запись $[m]$ обозначает терминальную вершину диаграммы Вороного, совпадающую с сайтом-точкой m .

Если многоугольная фигура имеет n вершин, то общее число сайтов, образуемых из её вершин и сторон, составляет $2n$. Тогда число ячеек Вороного, входящих в разбиение Вороного, также не превосходит $2n$. Поскольку диаграмма Вороного представляет собой плоский граф, для него выполняется теорема Эйлера, связывающая количество вершин v , рёбер e и граней f плоского графа следующим образом

$$v - e + f = 2.$$

Следствием теоремы Эйлера является асимптотическая оценка $O(n)$ для числа граней и рёбер плоского графа. Тогда число рёбер в диаграмме Вороного есть $O(n)$, а каждое ребро диаграммы состоит из одного бисектора, следовательно, общее количество бисекторов в диаграмме составит величину $O(n)$.

Таблица 7.1. Последовательность шагов в алгоритме построения диаграммы Вороного многоугольной фигуры (рис.7.5).

Шаг	Обрабатываемый активный бисектор	Построение второй концевой точки бисектора	Сравнение со списком готовых бисекторов	Порождение новых активных бисекторов	Поместить в список готовых бисекторов	Список активных бисекторов (текущее состояние)
0						(9,1)
1	(9,1)	{9,1,12}	—	(9,12) (12,1)	да	(9,12) (12,1)
2	(9,12)	{9,12,3}	—	(9,13) (13,12)	да	(12,1) (9,13) (13,12)
3	(12,1)	{12,1,11}	—	(12,11) (11,1)	да	(9,13) (13,12) (12,11) (11,1)
4	(9,13)	{9,13,7}	—	(9,7) (7,13)	да	(13,12) (12,11) (11,1) (9,7) (7,13)
5	(13,12)	[12]	—	—	да	(12,11) (11,1) (9,7) (7,13)
6	(12,11)	[12]	—	—	да	(11,1) (9,7) (7,13)
7	(11,1)	{11,1,10}	—	(11,10) (10,1)	да	(9,7) (7,13) (11,10) (10,1)
8	(9,7)	[8]	—	—	да	(7,13) (11,10) (10,1)
9	(7,13)	{7,13,6}	—	(7,6) (6,13)	да	(11,10) (10,1) (7,6) (6,13)
10	(11,10)	[10]	—	—	да	(10,1) (7,6) (6,13)
11	(10,1)	{10,1,3}	—	(10,3) (3,1)	да	(7,6) (6,13) (10,3) (3,1)
12	(7,6)	[6]	—	—	да	(6,13) (10,3) (3,1)
13	(6,13)	{6,13,5}	—	(6,5) (5,13)	да	(10,3) (3,1) (6,5) (5,13)
14	(10,3)	{10,3,15}	—	(10,15) (15,3)	да	(3,1) (6,5) (5,13) (10,15) (15,3)
15	(3,1)	[2]	—	—	да	(6,5) (5,13) (10,15) (15,3)
16	(6,5)	[6]	—	—	да	(5,13) (10,15) (15,3)
17	(5,13)	{5,13,14}	—	(5,14) (14,13)	да	(10,15) (15,3) (5,14) (14,13)
18	(10,15)	[10]	—	—	да	(15,3) (5,14) (14,13)
19	(15,3)	{15,3,14}	—	(15,14) (14,3)	да	(5,14) (14,13) (15,14) (14,3)
20	(5,14)	{5,14,3}	—	(5,3) (3,14)	да	(14,13) (15,14) (14,3) (5,3) (3,14)
21	(14,13)	[14]	—	—	да	(15,14) (14,3) (5,3) (3,14)
22	(15,14)	[14]	—	—	да	(14,3) (5,3) (3,14)
23	(14,3)	{14,3,5}	—	(14,5) (5,3)	да	(5,3) (3,14) (14,5) (5,3)
24	(5,3)	[4]	—	—	да	(3,14) (14,5) (5,3)
25	(3,14)	{3,14,15}	(14,3)	—	нет	(14,5) (5,3)
26	(14,5)	{14,5,13}	(5,14)	—	нет	(5,3)
27	(5,3)	[4]	(5,3)	—	нет	—

Согласно предложенному алгоритму каждый бисектор в какой-то момент попадает в список активных, Причём благодаря контролю на совпадение бисекторов повторное попадание бисектора в этот список невозможно. Таким образом, общее число шагов в

основном цикле алгоритма, определяемое числом порожденных активных бисекторов, есть $O(n)$.

Оценим трудоёмкость одного шага основного цикла. Построение бисектора включает в себя перебор всех сайтов-кандидатов для построения второй концевой точки бисектора, т.е. требует $O(n)$ проверок. Каждая проверка состоит в построении касательной окружности для трёх сайтов, что занимает время $O(1)$. Следовательно построение бисектора требует время $O(n)$. Далее построенный бисектор должен быть проверен на совпадение со списком готовых бисекторов. Проверка осуществляется просмотром всего списка готовых бисекторов, длина которого составляет $O(n)$, и сравнения с каждым бисектором из этого списка, которое требует времени $O(1)$. Таким образом, проверка на совпадение занимает также время $O(n)$. В результате общая оценка времени выполнения одного шага основного цикла есть $O(n)$. Учитывая, что число шагов есть тоже $O(n)$, получаем общую оценку времени работы алгоритма $O(n^2)$.

Описанный алгоритм строит последовательно все ребра и вершины диаграммы Вороного, Причём каждый уже построенный элемент не разрушается в процессе дальнейшего построения остальных элементов. Такие алгоритмы называются *жадными*. Достоинством алгоритма является его относительная простота с точки зрения программной реализации. Однако, «квадратичная» вычислительная сложность $O(n^2)$ позволяет применять алгоритм только при решении задач небольшой размерности. В тех практических задачах, в которых число вершин многоугольной фигуры составляет $10^5 \div 10^6$, алгоритмы квадратичной сложности, как правило, неприемлемы. Для этих задач нужны более эффективные алгоритмы, имеющие «субквадратичную» сложность.