

## Лекции 12. Диаграмма Вороного в метрике Лагерра

Определение 1. Метрикой Лагέρра в евклидовом пространстве, мерой близости (Лагерровым расстоянием) между точкой и кругом, называют метрику, заданную отношением

$$L = (X - x)^2 + (Y - y)^2 - r^2,$$

где  $(X, Y)$  – координаты точки,  $(x, y)$  – координаты центра круга радиуса  $r$  (см. рис. 1).

Строго говоря, эта величина не является ни мерой, ни метрикой. Существует более корректное название «Степень точки относительно окружности».

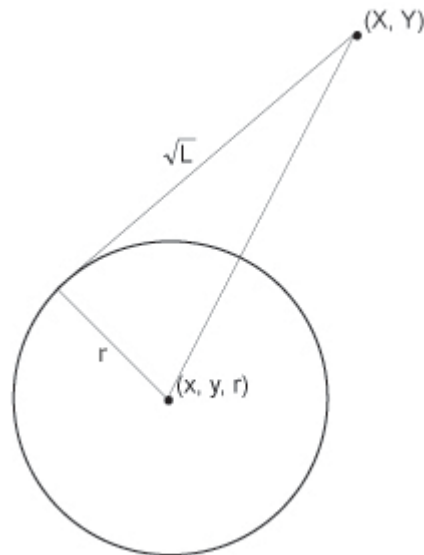


Рис. 1. Геометрический смысл метрика Лагерра

Расстоянию Лагерра между точкой и кругом в метрике Лагерра соответствует квадрат длины касательной, проведенной из точки к кругу.

Дадим определение для полигона Вороного в терминах метрики Лагерра.

Определение 2. Пусть задано конечное множество  $P$  сайтов–кругов на плоскости с определенными центром и радиусом; для каждого круга, центр которого называется полюсом, *полигон Вороного* определяется как геометрическое место точек на плоскости, заданное соотношением:

$$V(p) = \{z : L(z, p) \leq L(z, q), q \in P\},$$

где  $L(z, p)$  – Лагеррово расстояние между точкой  $z = (X, Y) \in R^2$  и кругом  $p = (x, y, r) \in P$ :

$$(L(z, p) = (X - x)^2 + (Y - y)^2 - r^2).$$

Тогда определения понятий разбиения Вороного и двойственной триангуляции справедливы и для случая использования метрики Лагерра (пример рис. 2).

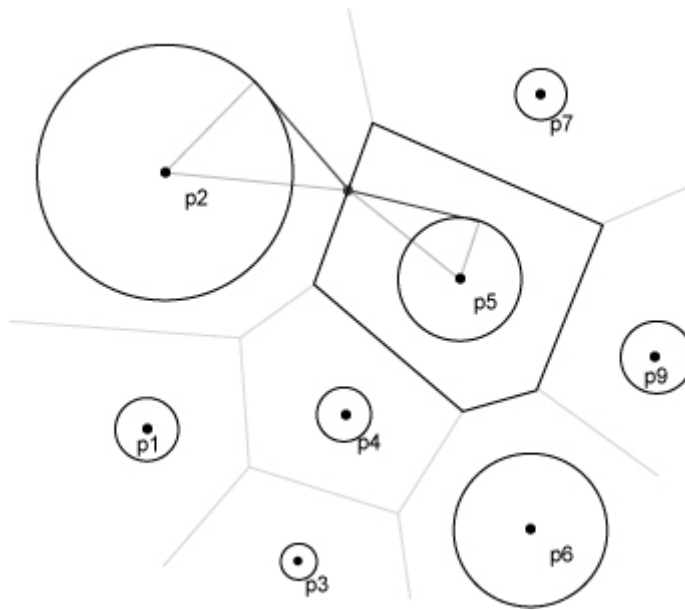


Рис. 2. Диаграмма Вороного в метрике Лагерра

Рассмотрим еще одно понятие:

Определение 3. Для двух кругов  $p_1, p_2$  заданных на плоскости  $R^2$  радикальной осью называется геометрическое место точек такое, что

$$R(p_1, p_2) = \{z : L(z, p_1) = L(z, p_2)\},$$

где  $L(z, p)$  - Лагеррово расстояние между точкой и кругом.

Как видно из определения, отрезки радикальных осей, построенных для данной точки и ее ближайших соседей, образуют полигон Вороного для этой точки.

Случаи расположения радикальной оси представлены на рис. 3.

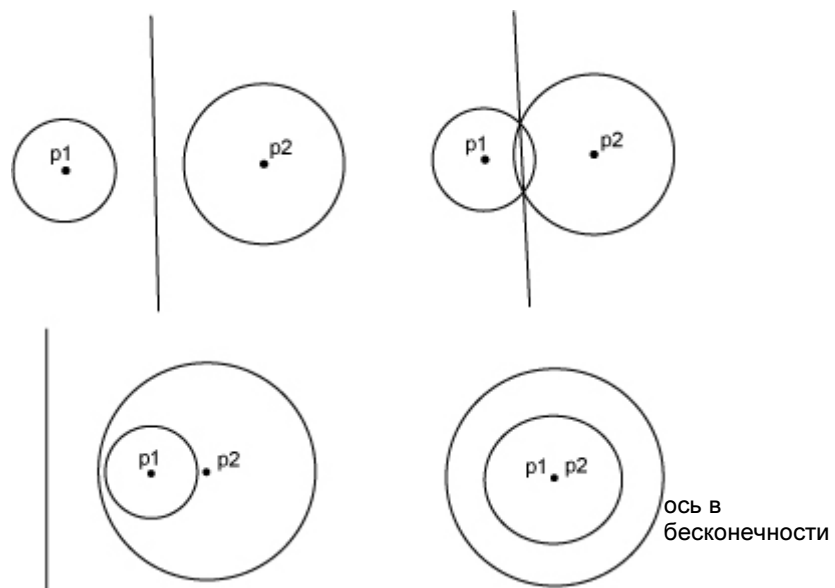


Рис. 3. Радикальные оси

Уравнение прямой радикальной оси можно получить непосредственно:

$$R(p_1, p_2) = \{z : L(z, p_1) = L(z, p_2)\},$$

$$L(z, p_1) = L(z, p_2) \Rightarrow L(z, p_1) - L(z, p_2) = 0,$$

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 - r_1^2 - (X - x_2)^2 - (Y - y_2)^2 + r_2^2 = 0,$$

$$2(x_2 - x_1)X + 2(y_2 - y_1)Y + (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - r_1^2 + r_2^2) = 0. \quad (1)$$

Радикальные оси тройки сайев-кругов, соответствующих смежным полигонам разбиения Вороного, пересекаются в одной точке, называемой радикальным центром тройки кругов. Эта точка является центром так называемого Лагеррова круга (рис. 4).

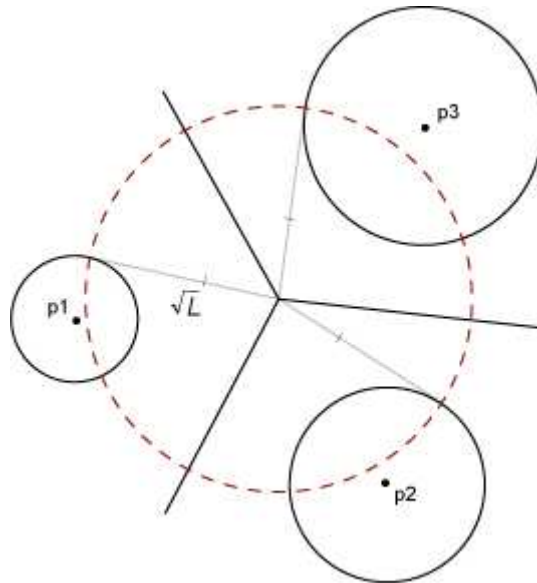


Рис. 4. Лагерров круг

*Определение 4.* Лагерровым кругом, «описанным» вокруг треугольника из трёх сайтов, имеющих смежные полигоны Вороного, называется круг с центром в точке пересечения радикальных осей кругов, соответствующих данным сайтам, и радиусом, равным  $\sqrt{L} = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 - r^2}$ , где  $(x, y) \in R^2$  и  $r$  - координаты центра и радиус любого из кругов-полюсов,  $O = (X, Y) \in R^2$  - центр Лагеррова круга.

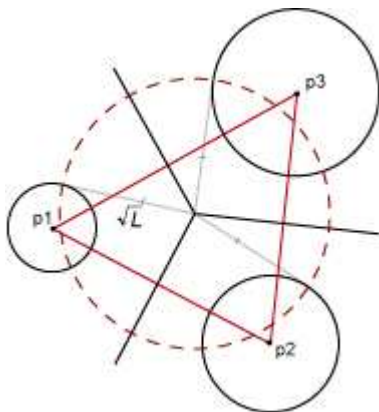


Рис. 5. Лагерров круг, построенный для треугольника

Координаты центра Лагеррова круга находятся из условия пересечения радикальных осей для данной тройки кругов. Приравнивая левые части уравнений (1) трех осей получим систему уравнений, решая которую найдем искомые координаты.

$$X_0 = \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$\mathbf{O} = (X_0, Y_0):$$

$$Y_0 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

где  $a_1 = x_2 - x_1$ ,  $a_2 = x_1 - x_3$ ,  $b_1 = y_2 - y_1$ ,  $b_2 = y_1 - y_3$ ,

$c_1 = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - r_1^2 + r_2^2$ ,  $c_2 = x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - r_3^2 + r_1^2$ ,

$$R_0 = \sqrt{L} = \sqrt{(X_0 - x_1)^2 + (Y_0 - y_1)^2 - r_1^2}.$$

Определение 5. Триангуляцией Делоне, двойственной данному разбиению Вороного в метрике Лагерра, называется выпуклая триангуляция, удовлетворяющая условию: внутри Лагеррова круга построенного для любого треугольника, не попадает ни один из прочих заданных сайтов триангуляции.

Здесь «не попадает» понимается в терминах Лагерровой метрики: до всякого другого сайта Лагеррово расстояние от центра Лагеррова круга больше, чем до сайтов – вершин соответствующего треугольника (рис. 6). Иными словами, отрезок касательной, проведенной из центра Лагеррова круга к любому сайту, кроме вершин образующего треугольника, больше его радиуса.

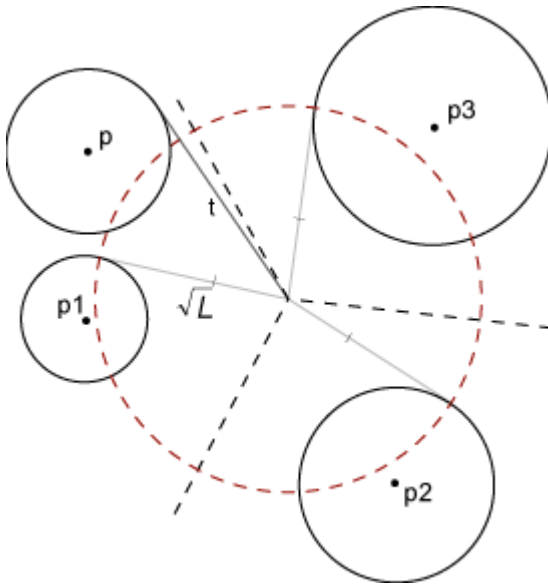


Рис. 6. Условие Делоне в метрике Лагерра

Заметим также следующее характеристическое свойство сайтов, образующих Лагерров круг, которое не выполняется для других сайтов. Сайты-круги ортогональны к Лагеррову кругу в точках пересечения с ним (см. рис. 7). Это утверждение также может быть использовано для проверки условия Делоне при построении триангуляции Делоне и разбиения Вороного в метрике Лагерра.

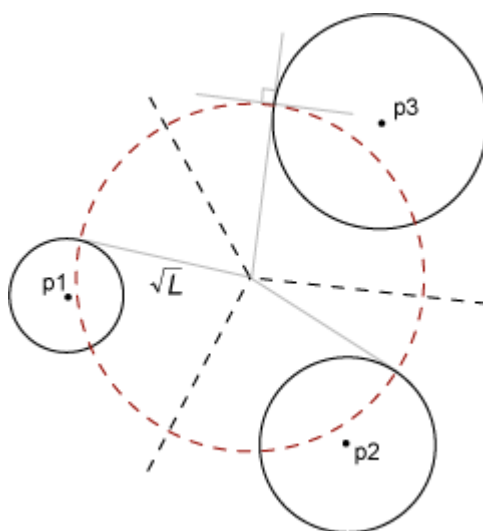


Рис. 7. Ортогональность кругов-сайтов и Лаггеррова круга в точках пересечения.

Заметим также что при проверке условия Делоне в метрике Лагерра и построении соответствующей диаграммы Вороного могут возникнуть нетривиальные случаи, когда окружность какого-то сайта не пересекает своего полигона Вороного или вообще её полигон Вороного вырождается в пустое множество. Пример, иллюстрирующий сказанное, изображен на рисунке 8. Здесь сайт  $p_3$  не пересекает свой полигон Вороного  $V(p_3)$ , а полигон Вороного сайта  $p_2$  вообще пуст.

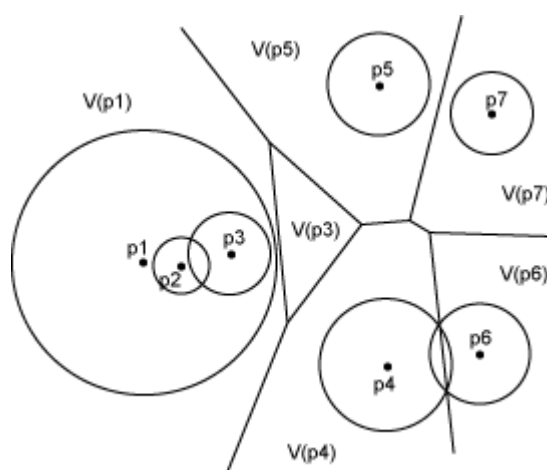


Рис. 8. Взаимное расположение сайтов и их полигонов Вороного.

Таким образом, Лаггерров круг является аналогом «пустого» описанного круга в обычной триангуляции Делоне и определяет условие Делоне в метрике Лагерра. Отметим также, что классические конструкции триангуляции Делоне и разбиение Вороного для сайтов-точек могут считаться частными случаями описанных выше, использующих Лаггеррову метрику, так как сайты-точки можно рассматривать как сайты-круги нулевого радиуса.

Для построения триангуляции Делоне с ограничениями существуют уже известные алгоритмы, на основе которых легко получить алгоритм построения триангуляции Делоне с ограничениями в метрике Лагерра. Подробно он описан в главе «Алгоритмы» данной работы.

Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне в метрике Лагерра имеет несколько практических приложений.

Диаграмма Вороного может быть использована для построения маршрутов в среде с препятствиями (рис.9).

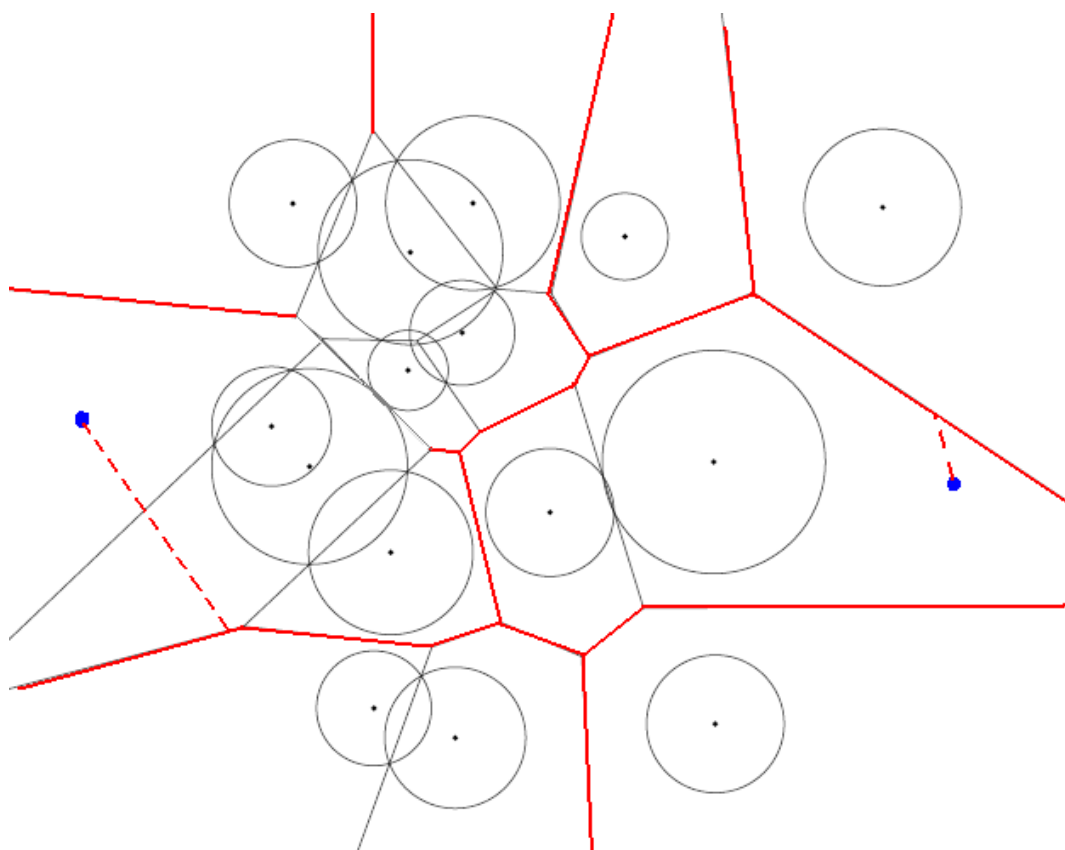


Рис.9. Маршрутизация в среде с круговыми препятствиями.

Для построения маршрута между двумя заданными точками в обход круговых препятствий воспользуемся диаграммой Вороного сайтов-кругов, описывающих эти препятствия. Среди рёбер диаграммы Вороного выделим те, которые не пересекаются со своими сайтами-кругами. Эти рёбра образуют подграф графа, рёбра которого не пересекают круговые препятствия. Поиск маршрутов после этого может быть осуществлён на этом выделенном подграфе диаграммы Вороного.

Другое приложение состоит в построении общей огибающей границы для множества кругов. Потребность в такой границе возникает в задачах визуализации большого количества пересекающихся окружностей с удалением их перекрытия, например, при рисовании информационных зон радиолокационных систем наблюдения.

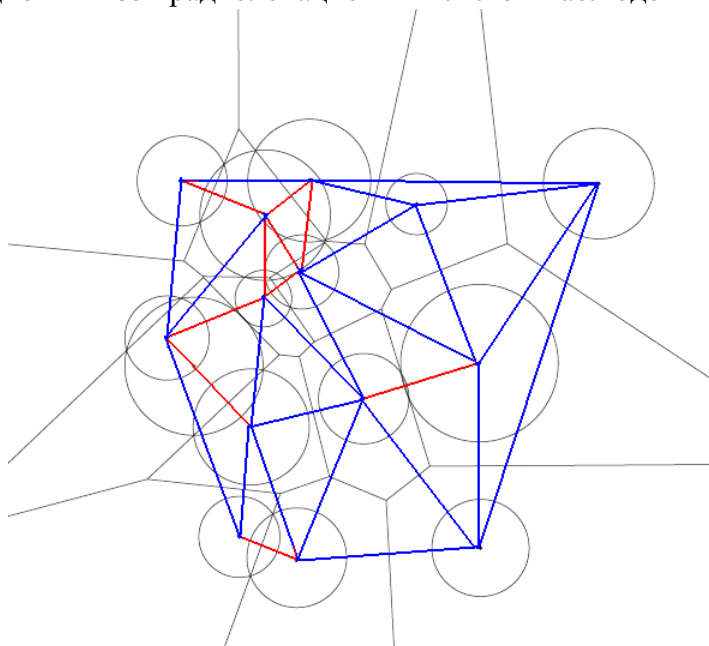


Рис.10. Триангуляция Делоне и выделенный в ней подграф.

Для построения такой огибающей в триангуляции Делоне выделяется подграф, состоящий рёбер, которые связывают пересекающиеся сайты-круги (рис.10). Этот подграф не обязательно является связным. Затем для каждой связной компоненты подграфа выполняется её внешний обход. Если в подграфе образовались внутренние циклы, но и внутренний обход этих циклов (в приведенном примере таких внутренних циклов нет). При этом все круги, которые проходятся в процессе обхода, вносят свой вклад в общую огибающую семейства: у каждого такого круга имеется дуга в огибающей. А каждая пара сайтов-кругов, инцидентных общему ребру, имеет точку пересечения, лежащую на огибающей всего семейства кругов. Это даёт возможность последовательно выявить все дуги огибающей и переходы с одной дуги на другую (рис.11).

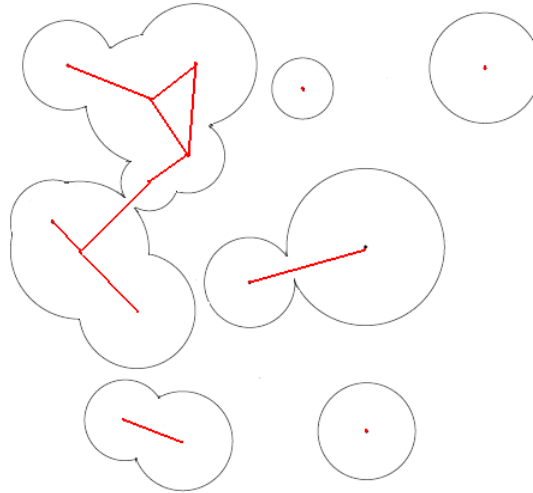


Рис.11. Огибающая семейства окружностей.

Алгоритмы построения диаграммы Вороного и триангуляции Делоне в метрике Лагерра аналогичны алгоритмам для сайтов-точек. Эффективные алгоритмы имеют вычислительную сложность  $O(n \log n)$ .