

- Прикладные модели машинного обучения •
Обучение с подкреплением
(Reinforcement Learning)

Воронцов Константин Вячеславович

`k.v.vorontsov@phystech.edu`

`http://www.MachineLearning.ru/wiki?title=User:Vokov`

Этот курс доступен на странице вики-ресурса

`http://www.MachineLearning.ru/wiki`

«Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов)»

1 Задача о многоруком бандите

- Простая постановка задачи
- Жадные и полужадные стратегии
- Адаптивные стратегии

2 Среда с состояниями

- Постановка задачи
- Метод Q-обучения
- Параметризация стратегий и функций ценности

3 Моделирование среды

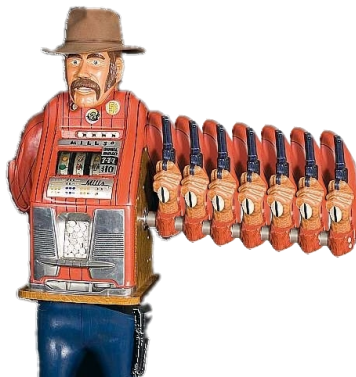
- Контекстный бандит и томпсоновское сэмплирование
- Линейная регрессионная модель премии
- Оценивание модели по историческим данным

Задача о многоруком бандите (multi-armed bandit)

Имеется множество допустимых *действий* (ручек, arm),
с различными распределениями размера *премии* (reward, payoff).

Как быстрее найти самое выгодное действие?

Какие возможны стратегии?



Задача о многоруком бандите (multi-armed bandit)

Дано: агент, действующий в среде $\langle A, p(r|a) \rangle$

A — конечное множество *действий* (action, arm)

$p(r|a)$ — неизвестное распределение *премии* за действие $a \in A$

Найти: $\pi_t(a)$ — *стратегию* (policy) агента в раундах $t = 1, \dots, T$

Игра агента со средой: инициализация $\pi_1(a) = 1/|A|$;

для всех раундов $t = 1, \dots, T$:

агент выбирает действие $a_t \sim \pi_t(a)$;

среда генерирует премию $r_t \sim p(r|a_t)$;

агент корректирует стратегию $\pi_{t+1}(a)$;

Критерий: $\sum_{t=1}^T r_t \rightarrow \max$ — суммарная премия в конце игры

Решение: \max ценности действия $Q^*(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t(a) \rightarrow \max_{a \in A}$

$Q_t(a) = \frac{\sum_{i=1}^t r_i [a_i = a]}{\sum_{i=1}^t [a_i = a]}$ — оценка ценности действия в t раундах

Примеры прикладных задач

- Управление роботами, технологическими процессами
- Генерация движений персонажей в мультипликации
- Рекомендация новостных статей пользователям
- Показ рекламы в Интернете
- Управление портфелем ценных бумаг, игра на бирже
- Управление ценами и ассортиментом в сетях продаж
- Маршрутизация в телекоммуникационных сетях
- Стратегические игры: шахматы, го, Dota2, StarCraft2, ...

Обобщения постановки задачи:

- Есть информация о состоянии среды или о контексте
- Есть параметрическая модель стратегии/ценности/среды

H. Robbins. Some aspects of the sequential design of experiments. 1952.

Жадная стратегия

Множество действий с максимальной *оценкой ценности*:

$$A_t = \text{Arg max}_{a \in A} Q_t(a), \quad Q_t(a) = \frac{\sum_{i=1}^t r_i[a_i = a]}{\sum_{i=1}^t [a_i = a]}$$

Жадная стратегия — выбирать любое действие из A_t :

$$\pi_{t+1}(a) = \frac{1}{|A_t|} [a \in A_t]$$

Недостаток жадной стратегии — по некоторым действиям a можем так и не набрать статистику для оценки $Q_t(a)$.

Компромисс «изучение–применение» (exploration–exploitation)
 ε -жадная стратегия:

$$\pi_{t+1}(a) = \frac{1 - \varepsilon}{|A_t|} [a \in A_t] + \frac{\varepsilon}{|A|}$$

Эвристика: параметр ε можно уменьшать со временем.

Метод UCB (upper confidence bound)

Выбор действия с максимальной верхней оценкой ценности:

$$A_t = \operatorname{Arg} \max_{a \in A} \left(Q_t(a) + \varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln t}{k_t(a)}} \right),$$

где $k_t(a) = \sum_{i=1}^t [a_i = a]$, ε — параметр exr/ext-компромисса.

Интерпретация:

чем меньше $k_t(a)$, тем менее исследована стратегия,
тем выше должна быть вероятность выбрать a ;

чем больше ε , тем стратегия более исследовательская.

Эвристика: параметр ε можно уменьшать со временем.

P. Auer, N. Cesa-Bianchi, P. Fischer. Finite-time analysis of the multiarmed bandit problem, Machine Learning, 2002.

Напоминание. Экспоненциальное скользящее среднее

Рекуррентная формула Moving Average для усреднения Q_t :

$$\begin{aligned} Q_t(a) &= \alpha \cdot (r_t) + (1 - \alpha) \cdot Q_{t-1}(a) \\ &= \text{EMA}_\alpha(r_t) \end{aligned}$$

При $\alpha = \text{const}$ это экспоненциальное скользящее среднее (EMA)

При $\alpha = \frac{1}{k_t(a)}$ это среднее арифметическое

Является приближённым рекуррентным решением задачи прогнозирования временного ряда r_0, \dots, r_t, \dots :

- простейшая регрессионная модель — константа $\hat{r}_{t+1} = C$,
- наблюдения учитываются с весами, убывающими в прошлое,
- авторегрессия, метод наименьших квадратов:

$$\hat{r}_{t+1} = \arg \min_C \sum_{i=0}^t \beta^{t-i} (r_i - C)^2, \quad \beta \in (0, 1)$$

Использование ЕМА для конструирования стратегий

Метод преследования (pursuit) жадной стратегии:

$$\pi_{t+1}(a) = \text{EMA}_\alpha \left(\frac{[a \in A_t]}{|A_t|} \right), \quad a \in A$$

Сравнение с подкреплением (reinforcement comparison):

$\bar{r}_t = \text{EMA}_\alpha(r_t)$ — средняя премия по всем действиям,

$p_t(a_t) = \text{EMA}_\beta(r_t - \bar{r}_t)$ — преимущество (advantage) действия,

$$\pi_{t+1}(a) = \frac{\exp(\frac{1}{\tau} p_t(a))}{\sum_{a'} \exp(\frac{1}{\tau} p_t(a'))},$$

при $\tau \rightarrow 0$ стратегия стремится к жадной,

при $\tau \rightarrow \infty$ — к равномерной, т.е. чисто исследовательской.

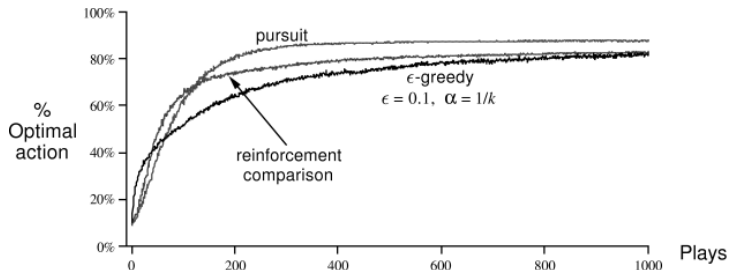
Экспериментальный факт:

не существует метода, универсально лучшего для всех задач

Сравнение стратегий в имитационных экспериментах

10-рукая испытательная среда. Генерируется 2000 задач:
 $|A| = 10$, $p(r|a) = \mathcal{N}(r; Q^*(a), 1)$, $Q^*(a) \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Зависимость доли оптимальных действий (% optimal action) от числа шагов t , усреднённая по 2000 синтетическим задачам



Richard Sutton, Andrew Barto. Reinforcement Learning: An Introduction.
The MIT Press. 1998, 2004, 2018

Р. Саттон, Э. Барто. Обучение с подкреплением. 2011, 2020

Постановка задачи в случае, когда агент влияет на среду

Дано: агент, действующий в среде $\langle A, S, p(r|a, s), p(s|a, s) \rangle$

S — конечное множество состояний среды (state)

$p(s'|a, s)$ — неизвестное распределение переходов

Найти: $\pi_t(a|s)$ — стратегию (policy) агента в раундах $t = 1, \dots, T$

Игра агента со средой: инициализация $\pi_1(a|s) = 1/|A|$ и s_1 ;
для всех раундов $t = 1, \dots, T$

агент выбирает действие $a_t \sim \pi_t(a|s_t)$;

среда генерирует премию $r_t \sim p(r|a_t, s_t)$;

среда переходит в новое состояние $s_{t+1} \sim p(s|a_t, s_t)$;

агент корректирует стратегию $\pi_{t+1}(a|s)$;

Критерий: $\sum_{t=1}^T r_t \rightarrow \max$ — суммарная премия в конце игры

Марковский процесс принятия решений (МППР, MDP):

$$P(s_{t+1}, r_t | s_t, a_t, \cancel{r_{t-1}}, \cancel{s_{t-1}}, \cancel{a_{t-1}}, \dots, s_1, a_1) = P(s_{t+1}, r_t | s_t, a_t)$$

Понятия выгоды и ценности действия

Суммарная выгода (return) на конечном горизонте T :

$$R_t = r_t + r_{t+1} + \dots + r_{t+T}$$

Дисконтированная выгода (discounted return):

$$R_t = r_t + \gamma r_{t+1} + \dots + \gamma^k r_{t+k} + \dots$$

где $\gamma \in [0, 1]$ — коэффициент дисконтирования,

$1 + \gamma + \gamma^2 + \dots = \frac{1}{1-\gamma}$ — горизонт дальновидности агента.

Функции ценности состояния $V^\pi(s)$ и *ценности действия* в состоянии $Q^\pi(s, a)$ при условии, что агент следует стратегии π :

$$V^\pi(s) = E_\pi(R_t | s_t = s) = E_\pi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k} \mid s_t = s\right)$$

$$Q^\pi(s, a) = E_\pi(R_t | s_t = s, a_t = a) = E_\pi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k} \mid s_t = s, a_t = a\right)$$

Жадные стратегии максимизации ценности

Рекуррентная формула для функции ценности $Q^\pi(s, a)$:

$$\begin{aligned} Q^\pi(s, a) &= \mathbb{E}_\pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k} \mid s_t = s, a_t = a \right) \\ &= \mathbb{E}_\pi \left(r_t + \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid s_t = s, a_t = a \right) \\ &= \mathbb{E}_\pi \left(r_t + \gamma Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1}) \mid s_t = s, a_t = a \right) \end{aligned}$$

Уравнение Беллмана для оптимальной функции ценности Q^* :

$$Q^*(s, a) = \mathbb{E}_\pi \left(r_t + \gamma \max_{a' \in A} Q^*(s_{t+1}, a') \mid s_t = s, a_t = a \right)$$

Утв. Жадная стратегия «выбирать то действие, на котором достигается максимум в уравнениях Беллмана» оптимальна:

$$\pi_{t+1}(a) = \frac{1}{|A_t|} [a \in A_t], \quad A_t = \text{Arg max}_{a \in A} Q^*(s_t, a)$$

Метод Q-обучения

Аппроксимируем $Q^*(s, a)$ экспоненциальным скользящим средним:

$$Q(s_t, a_t) = \text{EMA}_\alpha(r_t + \gamma \max_a Q(s_{t+1}, a))$$

инициализация стратегии $\pi_1(a | s)$ и состояния среды s_1 ;
для всех раундов $t = 1, \dots, T, \dots$

агент выбирает действие $a_t \sim \pi_t(a | s_t)$;

среда генерирует $r_t \sim p(r | a_t, s_t)$ и $s_{t+1} \sim p(s | a_t, s_t)$;

$Q(s_t, a_t) := \alpha(r_t + \gamma \max_a Q(s_{t+1}, a)) + (1 - \alpha)Q(s_t, a_t)$;

Утв. Если α_t уменьшается ($\sum_t \alpha_t = \infty$, $\sum_t \alpha_t^2 < \infty$), и все s посещаются бесконечное число раз, то $Q \xrightarrow{\text{пн}} Q^*$, $t \rightarrow \infty$

Возможны два способа выбора действий:

- **on-policy:** $a_t \sim \pi_t(a | s_t) \Leftrightarrow a_t \in \text{Arg max}_a Q(s_t, a)$
- **off-policy:** $a_t \sim \pi_t(a | s_t)$ — другая стратегия на основе Q

Отличия от обычных задач машинного обучения

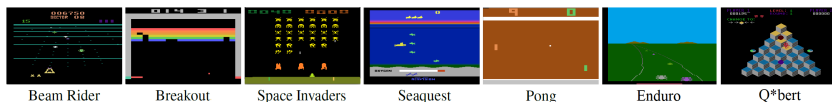
- выборка (s_t, a_t, r_t) не является независимой
- распределение $p(s_t, a_t, r_t)$ может меняться во времени и зависеть от стратегии агента π
- премии могут быть
 - отложенными (оценивать действия с задержкой)
 - разреженными (почти всё время $r_t = 0$)
 - зашумлёнными (не ясно, за что именно премия)

Какие параметрические модели можно обучать:

- функцию ценности действия в состоянии $Q(s, a; \theta)$
- функцию ценности состояния $V(s; \theta)$
- стратегию $\pi_{t+1}(a|s; \theta)$
- модель среды $(r_t, s_{t+1}) = \mu(s_t, a_t; \theta)$

Q-параметризация на примере обучения играм Atari

Среда — эмулятор 7 игр Atari, каждый кадр $210 \times 160 \text{pix}$ 128col

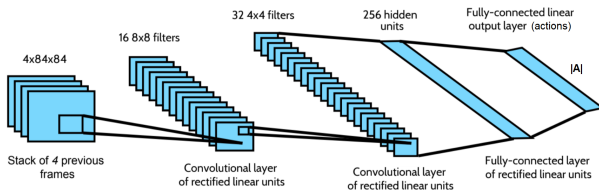


Состояния s — 4 последовательных кадра, сжатых до 84×84

Действия a — от 4 до 18, в зависимости от игры

Премии r — текущий SCORE согласно правилам игры

Функция ценности $Q(s, a; w)$ — CNN со входом s и $|A|$ выходами



V.Mnih et al. (DeepMind). Playing Atari with deep reinforcement learning. 2013

Метод DQN (Deep Q-Learning Network)

Сохранение траекторий $(s_t, a_t, r_t)_{t=1}^T$ в памяти (reply memory) для многократного *воспроизведения опыта* (experience replay)

Аппроксимация оптимальной функции ценности $Q(s_t, a_t)$ при фиксированных текущих параметрах сети w_t :

$$y_t = \begin{cases} r_t, & \text{если состояние } s_{t+1} \text{ терминальное} \\ r_t + \gamma \max_a Q(s_{t+1}, a; w_t), & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция потерь для обучения нейросевой модели $Q(s, a; w)$:

$$\mathcal{L}_t(w) = (Q(s_t, a_t; w) - y_t)^2$$

Стохастический градиент SGD (по мини-батчам длины 32):

$$w_{t+1} = w_t - \eta (Q(s_t, a_t; w_t) - y_t) \nabla_w Q(s_t, a_t; w_t)$$

V.Mnih et al. (DeepMind). Playing Atari with deep reinforcement learning. 2013

Метод DQN: собираем всё воедино

инициализация reply-памяти и параметров сети w ;

для всех эпизодов $m = 1, \dots, M$

инициализация состояния среды s_1 ;

для всех $t = 1, \dots, T_m$ (длина m -го эпизода)

$$a_t = \begin{cases} \text{случайное действие,} & \text{с вероятностью } \varepsilon; \\ \arg \max_a Q(s_t, a, w), & \text{с вероятностью } 1 - \varepsilon; \end{cases}$$

среда генерирует $r_t \sim p(r | a_t, s_t)$ и $s_{t+1} \sim p(s | a_t, s_t)$;

запомнить (s_t, a_t, r_t) в reply-памяти;

выбрать случайный фрагмент траектории из памяти;

для всех $j = 1, \dots, J$ (длина мини-батчей)

оценить y_j ;

сделать градиентный шаг, обновить w ;

Градиентная оптимизация стратегии (policy gradient)

$\pi(a | s, \theta)$ — стратегия агента с параметром θ

$F(s_t, a_t)$ — функция ценности или её оценка (например, R_t)

Задача максимизации $E_{\pi} F$ по вектору параметров стратегии θ :

$$E_{\pi} F(s, a) \equiv E_{a \sim \pi(a|s, \theta)} F(s, a) \rightarrow \max_{\theta}$$

Градиентный метод: $\theta^{(t+1)} := \theta^{(t)} + \eta \nabla_{\theta} E_{a \sim \pi} F(s, a)$

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta} E_{a \sim \pi} F(s, a) &= \nabla_{\theta} \sum_{a \in A} F(s, a) \pi(a | s, \theta) = \sum_{a \in A} F(s, a) \nabla_{\theta} \pi(a | s, \theta) = \\ &= \sum_{a \in A} F(s, a) \pi(a | s, \theta) \frac{\nabla_{\theta} \pi(a | s, \theta)}{\pi(a | s, \theta)} = \\ &= E_{a \sim \pi} [F(s, a) \nabla_{\theta} \ln \pi(a | s, \theta)] \end{aligned}$$

R. Sutton et al. Policy gradient methods for reinforcement learning with function approximation. NIPS 1999.

Градиентная оптимизация стратегии (policy gradient)

Замена E_π эмпирической оценкой EMA градиента:

$$\theta^{(t+1)} := \theta^{(t)} + \eta \text{EMA}_\alpha(F(s_t, a_t) \nabla_\theta \ln \pi(a_t | s_t, \theta^{(t)}))$$

Фактически, это стохастический градиент SGD с методом инерции Б.Т.Поляка для максимизации log-правдоподобия:

$$\sum_t F(s_t, a_t) \ln \pi(a_t | s_t, \theta) \rightarrow \max_\theta$$

Основные отличия от максимизации log-правдоподобия:

- вместо предсказания меток классов y_t — действия a_t
- вместо бинарных y_t — вещественные $F(s_t, a_t)$

Что можно использовать в качестве $F(s_t, a_t)$:

- функцию *выгоды* R_t ,
- функцию *ценности* $Q(s_t, a_t)$,
- функцию *преимущества* (advantage) $Q(s_t, a_t) - V(s_t)$

Алгоритм REINFORCE

$F(s_t, a_t) = R_t$ — выгода, становится известна в конце эпизода

инициализация стратегии $\pi_1(a | s)$ и состояния среды s_1 ;

для всех эпизодов $m = 1, \dots, M$

для всех раундов $t = 1, \dots, T_m$

агент выбирает действие $a_t \sim \pi_t(a | s_t, \theta)$;

среда генерирует $r_t \sim p(r | a_t, s_t)$ и $s_{t+1} \sim p(s | a_t, s_t)$;

$$\theta := \theta + \eta \sum_{t=1}^{T_m} R_t \nabla_{\theta} \ln \pi(a_t | s_t, \theta);$$

Преимущество policy gradient и алгоритма REINFORCE:

- легко обобщается на задачи с непрерывным множеством A

Недостаток:

- медленная сходимость, надо дожидаться конца эпизода

Алгоритм «Актёр–Критик» (Advantage Actor–Critic, A2C)

- Актёр корректирует стратегию под воздействием Критика
- Вместо R_t используем преимущество $\mathcal{A}_t = Q(s_t, a_t) - V(s_t)$ (уменьшается дисперсия, улучшается сходимость)
- Из уравнения Беллмана: $Q(s_t, a_t) \approx \mathbb{E}_{\pi} (r_t + \gamma V(s_{t+1}))$
- Параметр θ обновляется на каждом шаге

инициализация стратегии $\pi_1(a | s)$ и состояния среды s_1 ;
 для всех эпизодов $m = 1, \dots, M$, раундов $t = 1, \dots, T_m$

агент выбирает действие $a_t \sim \pi_t(a | s_t, \theta)$;

среда генерирует $r_t \sim p(r | a_t, s_t)$ и $s_{t+1} \sim p(s | a_t, s_t)$;

$V(s_t) := \text{EMA}_{\beta}(r_t + \gamma V(s_{t+1}))$;

$\mathcal{A}_t := r_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t)$;

$\theta := \theta + \eta \text{EMA}_{\alpha}(\mathcal{A}_t \nabla_{\theta} \ln \pi(a_t | s_t, \theta))$;

Следующий шаг: параметризовать оценку преимущества \mathcal{A}_t

Алгоритм «Актёр–Критик» с двойной параметризацией

$\pi(a | s, \theta)$ — стратегия агента (Актёра) с параметром θ
 $A(s_t, a_t; w)$ — модель преимущества с параметром w , делает Критика дальновиднее в средах с большим или сложным S :

$$\sum_t (A(s_t, a_t; w) - \mathcal{A}_t)^2 \rightarrow \min_w$$

инициализация стратегии $\pi_1(a | s)$ и состояния среды s_1 ;
для всех эпизодов $m = 1, \dots, M$

для всех раундов $t = 1, \dots, T_m$

агент выбирает действие $a_t \sim \pi_t(a | s_t, \theta)$;

среда генерирует $r_t \sim p(r | a_t, s_t)$ и $s_{t+1} \sim p(s | a_t, s_t)$;

$\theta := \theta + \eta \text{EMA}_\alpha(A(s_t, a_t; w) \nabla_\theta \ln \pi(a_t | s_t, \theta))$;

$\mathcal{A}_t = Q(s_t, a_t) - V(s_t)$ для всех $t = 1, \dots, T_m$;

$w := w - \eta_2 \sum_{t=1}^{T_m} (A(s_t, a_t; w) - \mathcal{A}_t) \nabla_w A(s_t, a_t; w)$;

Моделирование среды в обучении с подкреплением

Отличие Model-Based подходов от Model-Free:

- моделируется поведение среды $(r_t, s_{t+1}) = \mu(s_t, a_t; w)$
- возможно долгосрочное планирование действий
- возможна непрерывная параметризация как A , так и S
- в несложных технических системах управления адекватная параметрическая модель среды может быть известна

Трудность задачи:

- сложные среды требуют больших выборок для обучения моделей большой размерности
- RL может хорошо функционировать в смоделированной среде, и гораздо хуже — в настоящей

Томпсоновское сэмплирование (Thompson sampling)

$x_{ta} \in \mathbb{R}^n$ — контекст, вектор признаков действия $a \in A$ на шаге t
 x_{ta} содержит также информацию о текущем состоянии среды
 $p(r_t|x, w)$ — вероятностная модель премии, $w \in \mathbb{R}^n$

Игра агента и среды:

инициализация априорного распределения $p_1(w)$;

для всех раундов $t = 1, \dots, T$

среда сообщает агенту контексты x_{ta} для всех $a \in A$;

агент сэмплирует вектор модели премии $w_t \sim p_t(w)$;

агент выбирает действие $a_t = \arg \max_{a \in A} \langle x_{ta}, w_t \rangle$;

среда генерирует премию r_t ;

агент корректирует распределение по формуле Байеса:

$$p_{t+1}(w) \propto p(r_t|x_{ta_t}, w) p_t(w);$$

Томпсоновское сэмплирование с гауссовскими распределениями

$$p(r|x, w) = \mathcal{N}(r; \langle x, w \rangle, \sigma^2), \quad p(w_t) = \mathcal{N}(w_t; w, \sigma^2 B^{-1})$$

Игра агента и среды (contextual bandit with linear payoff)

инициализация: $B = I_{n \times n}$; $w = 0_n$; $f = 0_n$;

для всех раундов $t = 1, \dots, T$

среда сообщает агенту контексты x_{ta} для всех $a \in A$;

агент сэмплирует вектор линейной модели премии

$$w_t \sim \mathcal{N}(w, \sigma^2 B^{-1});$$

агент выбирает действие $a_t = \arg \max_{a \in A} \langle x_{ta}, w_t \rangle$;

среда генерирует премию r_t ;

агент корректирует параметры распределения:

$$B := B + x_{ta_t} x_{ta_t}^T; \quad f := f + x_{ta_t} r_t; \quad w := B^{-1} f;$$

Регрессия с инкрементным обучением и доверительной оценкой

$\hat{r}(s, a; w)$ — регрессионная модель премии с параметром w

$UCB(s, a)$ — верхняя оценка отклонения $\hat{r} - r$

δ — параметр (чем больше, тем больше exploration)

стратегия — максимизировать оценку премии за a_t в s_t

Игра агента со средой:

инициализация параметров w модели премии;

для всех раундов $t = 1, \dots, T, \dots$

агент выбирает действие

$$a_t = \arg \max_{a \in A} \left(\hat{r}(s_t, a; w) + \delta UCB(s_t, a) \right);$$

среда генерирует $r_t \sim p(r | a_t, s_t)$ и $s_{t+1} \sim p(s | a_t, s_t)$;

регрессия $\hat{r}(s, a; w)$ дообучается на точке (s_t, a_t, r_t) ;

Lihong Li, Wei Chu, John Langford, Robert E. Schapire. A contextual-bandit approach to personalized news article recommendation. WWW-2010.

Пример. Рекомендация новостных статей пользователям



Агент — рекомендательная система для персонализации показов новостных статей (Yahoo! Today).

F1..F4 — позиции для показа заголовков новостей.

A — новостные статьи, действия системы

s_t — состояние = пользователь, которому даём рекомендацию

$x_{ta} \in \mathbb{R}^n$ — признаковое описание пары (s_t, a)

$r_{ta} \in \{0, 1\}$ — премия = [пользователь s_t кликнул на статью a]

$Q_t(a)$ — средняя премия, CTR (click-through rate) статьи

Цель — повышение среднего CTR и «счастья пользователя»

Lihong Li, Wei Chu, John Langford, Robert E. Schapire. A contextual-bandit approach to personalized news article recommendation. WWW-2010.

Линейная модель премий и гребневая регрессия

Пусть $x_{ta} \in \mathbb{R}^n$, $w_a \in \mathbb{R}^n$.

Линейная модель премий для действия $a \in A$ в состоянии s_t :

$$E[r_{ta} | x_{ta}] = \langle x_{ta}, w_a \rangle.$$

Гребневая регрессия: обучение w_a для действия a в момент t :

$$\sum_{i=1}^t [a_i = a] (\langle x_{ia}, w_a \rangle - r_{ia})^2 + \frac{\tau}{2} \|w_a\|^2 \rightarrow \min_{w_a}.$$

$w_a = (F_a^T F_a + \tau I_n)^{-1} F_a^T y_a$ — решение задачи МНК, где

$F_a = (x_{ia})_{i=1: a_i=a}^t$ — $\ell \times n$ -матрица объекты–признаки,

$y_a = (r_{ia})_{i=1: a_i=a}^t$ — $\ell \times 1$ -вектор ответов,

$\ell = k_t(a) = \sum_{i=1}^t [a_i = a]$ — объём обучающей выборки.

LinUCB: линейная модель с верхней доверительной оценкой

Доверительный интервал с коэффициентом доверия $1 - \alpha$ для линейной модели регрессии w : $\|Fw - y\| \rightarrow \min_w$:

$$y = \langle x, w \rangle \pm \hat{\sigma} Z_\alpha \sqrt{x^\top (F^\top F)^{-1} x},$$

$Z_\alpha \equiv t_{\ell-n, 1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента,
 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\ell-n} \text{RSS}$ — оценка дисперсии отклика y .

Стратегия $\pi_t(a, x) = \frac{1}{|A_t|} [a \in A_t]$ — действие с максимальной верхней оценкой ценности UCB (upper confidence bound):

$$A_t = \text{Arg max}_{a \in A} \left(\langle x_{ta}, w_a \rangle + \delta \hat{\sigma} Z_\alpha \sqrt{x_{ta}^\top (F_a^\top F_a + \tau I_n)^{-1} x_{ta}} \right).$$

Чем больше параметр δ , тем больше исследования.

LinUCB: особенности реализации и обобщения

- Инкрементный алгоритм пересчёта w_a и матрицы $(F_a^T F_a + \tau I_n)^{-1}$ при добавлении каждой строки в F_a .
- Гибридная линейная модель $Q^*(a) = \langle \tilde{x}_t, v \rangle + \langle x_{ta}, w_a \rangle$, где \tilde{x}_t — часть контекста, не зависящая от действия a .
- «Сырые признаки»:
пользователи: 12 соцдем, 200 география, ~ 1000 категорий,
статьи: ~ 100 категорий.
- Используется кластеризация и понижение размерности:
 $\dim w_a = 6$, $\dim v = 36$.
- Можно было бы использовать любую другую модель с инкрементным обучением и доверительными оценками.

Lihong Li, Wei Chu, John Langford, Robert E. Schapire. A contextual-bandit approach to personalized news article recommendation. WWW-2010.

Оценивание модели по историческим данным

Проблема off-line оценивания стратегии π :
исторические данные накоплены при использовании
другой стратегии (logging policy) $\pi_0(a)$, отличной от π

Идея:

для оценивания $Q_t(a)$ отбираются только те события (x_{ta}, a, r_{ta}) ,
для которых стратегии π и π_0 выбирали одинаковое действие:

$$a = \arg \max_a \pi(a, x_{ta}) = \arg \max_a \pi_0(a)$$

(нужны очень большие данные или сходство стратегий)

Утв. Если $\pi_0(a)$ — равномерное распределение, то
оценка $Q_t(a)$ по отобранной выборке является несмещённой.

Lihong Li, Wei Chu, John Langford, Robert E. Schapire. A contextual-bandit approach to personalized news article recommendation. WWW-2010.

- В обучении с подкреплением нет ответов учителя, есть только ответная реакция среды
- Что можно обучать в Model-Free подходах:
 - функцию ценности $Q(s, a; w)$, например, методом SGD
 - стратегию $\pi(a|s; w)$, методом Policy Gradient
 - модели актора $a(s; w_1)$ и критика $Q(s, a; w_2)$
- Что можно обучать в Model-Based подходах:
 - только модель премии $r(s, a; w)$
 - модель среды $(r_t, s_{t+1}) = \mu(s_t, a_t; w)$
- Компромисс «изучение–применение» при любом обучении с подкреплением подбирается экспериментальным путём