• Прикладные модели машинного обучения •

Инкрементное и онлайновое обучение
Прогнозирование временных рядов

Воронцов Константин Вячеславович
k.v.vorontsov@phystech.edu
http://www.MachineLearning.ru/wiki?title=User:Vokov

Этот курс доступен на странице вики-ресурса
http://www.MachineLearning.ru/wiki
«Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов)»

МФТИ • 3 апреля 2026

Содержание

Задача онлайнового обучения

Задача обучения с учителем на потоке данных:

$(x_i, y_i)_{i=1}^{\ell}$ — последовательность прецедентов «объект, ответ»

$a(x, w)$ — параметрическая модель зависимости $y(x)$

$\mathscr{L}(a, y)$ — функция потерь

инициализировать параметры модели w_0;

для всех $i = 1, \ldots, \ell$

- получить очередной объект x_i;
- сделать предсказание $a_i := a(x_i, w_{i-1})$;
- получить ответ y_i и оценить потерю $\mathscr{L}_i := \mathscr{L}(a_i, y_i)$;
- обновить модель $w_i := \text{Update}(w_{i-1}, x_i, y_i)$;

$$Q(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \mathscr{L}_i$$ — кривая обучения (LOO learning curve)

Steven C. H. Hoi et al. Online learning: a comprehensive survey. 2018

Проблематика инкрементного и онлайнового обучения

- Как эффективно обновить модель по одному прецеденту?
- Как усложнять модель по мере роста объёма данных?
- Как обеспечить то же качество, что в оффлайне?
- Как избежать хранения всей выборки данных?
- Как при этом избежать «катастрофического забывания»?
- Как, добавляя новые объекты, ещё и удалять старые?

Что может добавляться в задачах машинного обучения:

- объекты — основной, но не единственный случай
- признаки
- размерность модели
- классы/кластеры
- подвыборки/подзадачи
- области пространства данных, разладки (concept drift)

Online Learning ≠ Incremental Learning. В чём отличия?

- Online обрабатывает объекты в потоке, по одному
  Incremental может накапливать пакеты обновлений
- Online может забывать старые данные (catastrophic forgetting)
  Incremental часто подразумевает эквивалентность результата оффлайновому обучению по полной выборке
- Online исследования озабочены теоретическими гарантиями
  Incremental сосредоточен на реализации быстрых алгоритмов
- Online обязательно является Incremental
  Incremental НЕ обязательно является Online

Continual (lifelong) learning — обучение одной модели разным задачам так, чтобы новые задачи не вытесняли старые

Anytime algorithm — алгоритм, который обучается по потоку, но в любой момент может быть использован для предсказаний

Напоминание. Ленивое обучение (lazy learning)

$U \subseteq X^\ell$ — множество хранимых эталонов (prototypes)
$K_h(x, x_j)$ — ядро ширины h, сходство пары объектов x и x_j

Метрическая классификация (kNN, окно Парзена, RBF):

$$a(x) = \arg\max_{y \in Y} \sum_{j \in U} [y_j = y] K_h(x, x_j)$$

Непараметрическая регрессия (Надарая-Уотсона):

$$a(x) = \frac{\sum_{j \in U} y_j K_h(x, x_j)}{\sum_{j \in U} K_h(x, x_j)}$$

Непараметрическая оценка плотности (Парзена–Розенблатта):

$$a(x) = \frac{1}{|U| V_h} \sum_{j \in U} K_h(x, x_j)$$

Онлайновый отбор эталонов (prototype selection)

B — «бюджет», максимальное число хранимых объектов $|U|$
Δ_j — накапливаемая оценка полезности объекта x_j
C_j — счётчик, сколько раз объект x_j влиял на другого
$C_{\min}$ — минимальное значение счётчика влияний
$K_{\min}$ — минимальное влияние $K_h(x_i, x_j)$ объекта x_j на x_i
$\mathscr{L}_{i\setminus j}$ — потеря на объекте x_i при исключении объекта x_j из U

для всех $i = 1, \ldots, \ell$
  получить x_i; вычислить $a(x_i)$; $\Delta_i := 0$; $C_i := 0$;
  $U := U \cup \{x_i\}$;
  для всех $x_j \in U$, близких к x_i: $K_h(x_i, x_j) > K_{\min}$
    $\Delta_i := \Delta_i + (\mathscr{L}_{j\setminus i} - \mathscr{L}_j)$; $C_i := C_i + 1$;
    $\Delta_j := \Delta_j + (\mathscr{L}_{i\setminus j} - \mathscr{L}_i)$; $C_j := C_j + 1$;
  если $|U| > B$ **то** $U := U \setminus \left\{x_j : \frac{\Delta_j}{C_j} \to \min,\ C_j > C_{\min}\right\}$;

Преимущества и недостатки ленивого онлайна

Преимущества:

- простота реализации
- решения онлайна и оффлайна гарантированно совпадают (только при хранении всех данных, $U = X^\ell$)
- идею отбора эталонов можно переносить на другие онлайновые методы, для которых имеется быстрый способ
  1) оценивать влияние одних объектов на другие и
  2) оценивать декрементную потерю $\mathscr{L}_{i\setminus j}$

Недостатки:

- хранение выборки — это не настоящий онлайн
- обучение ширины окна h и других параметров функций сходства K_h могут существенно усложнять алгоритм

Напоминание. Наивный байесовский классификатор

«Оптимальный» байесовский классификатор:

$$a(x) = \arg\max_{y \in Y} \lambda_y P(y) p(x|y)$$

«Наивное» предположение о независимости признаков:

$$a(x) = \arg\max_{y \in Y} \left(\ln(\lambda_y P(y)) + \sum_{j=1}^{n} \ln p(x^j|y) \right)$$

Предположение, что одномерные плотности экспоненциальны:

$$p(x^j|y;\theta_{yj},\phi_{yj}) = \exp\left(\frac{x^j\theta_{yj} - c_j(\theta_{yj})}{\phi_{yj}} + h_j(x^j,\phi_{yj}) \right)$$

Задача максимизации log-правдоподобия распадается на независимые подзадачи по классам y и признакам j:

$$L(\theta,\phi) = \ln \prod_{i=1}^{\ell} p(x_i|y_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x_i \in X_y} \ln p(x_i^j|y;\theta_{yj},\phi_{yj}) \right) \to \max_{\theta,\phi}$$

Напоминание. Линейный наивный байесовский классификатор

Решение θ_{yj} через среднее значение признака j в классе y:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{yj}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_j'(\theta_{yj}) = \sum_{x_i \in X_y} \frac{x_i^j}{|X_y|} \equiv \bar{x}_{yj} \quad \Rightarrow \quad \theta_{yj} = [c_j']^{-1}(\bar{x}_{yj})$$

Решение ϕ_{yj} выражается из уравнения $\frac{\partial L}{\partial \phi_{yj}} = 0$, например,

в случае гауссовского распределения $\phi_{yj} = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \left(x_i^j - \bar{x}_{y_i j}\right)^2$

Naïve Bayes — линейный классификатор:

$$a(x) = \arg\max_{y \in Y} \left(\sum_{j=1}^{n} x^j \underbrace{\frac{\theta_{yj}}{\phi_{yj}}}_{w_{yj}} + \underbrace{\ln(\lambda_y P(y)) - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j(\theta_{yj})}{\phi_{yj}}}_{b_y} + \underbrace{\cancel{h_j(x^j, \phi_{yj})}}_{\text{если от } y \text{ не зависит}} \right)$$

Онлайновое обучение — рекуррентные формулы для $\bar{x}_{yj}$, ϕ_{yj}

- скорость $O(n\ell)$ как в оффлайне, так и в онлайне
- решения онлайна и оффлайна совпадают

Онлайновый наивный байесовский классификатор (ONB)

инициализировать $b_y := \ln(\lambda_y P(y))$; $\bar{x}_{yj} := 0$; $\ell_y := 0$;

для всех $i = 1, \ldots, \ell$

получить очередной объект $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$;

сделать предсказание $a_i := \arg\max\limits_{y \in Y} \left(b_y + \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^j w_{yj} \right)$;

получить ответ y_i и оценить потерю $\mathscr{L}_i := \mathscr{L}(a_i, y_i)$;

для $y = y_i$ обновить средние по рекуррентной формуле:

$\bar{x}_{yj} := \frac{1}{\ell_y + 1} x_i^j + \frac{\ell_y}{\ell_y + 1} \bar{x}_{yj}$; $\ell_y := \ell_y + 1$;

оценить параметры распределений:

$\theta_{yj} := [c_j']^{-1}(\bar{x}_{yj})$ и ϕ_{yj} (в зависимости от типа признака);

обновить коэффициенты линейной модели:

$w_{yj} := \frac{\theta_{yj}}{\phi_{yj}}$; $b_y := \ln(\lambda_y P(y)) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{c_j(\theta_{yj})}{\phi_{yj}}$;

Преимущества и недостатки ONB

Преимущества:

- скорость $O(n\ell)$ как в оффлайне, так и в онлайне
- решения онлайна и оффлайна совпадают
- не чувствителен к числу классов и дисбалансу классов
- практически не бывает переобучения
- подходит для разнотипных данных и данных с пропусками
- в задачах классификации текстов качество сопоставимо с SVM (при введении отбора признаков по TF-IDF)
- часто используется в качестве «бейслайна для битья»

Недостатки:

- в большинстве задач «наивное» предположение о независимости признаков совсем не работает

J.Rennie et al. Tackling the poor assumptions of Naive Bayes text classifiers. 2003

Алгоритм Perceptron для линейного классификатора

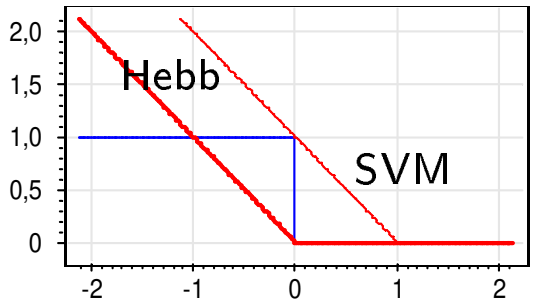
Пусть $x_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \{-1, +1\}$; модель $a(x, w) = \text{sign}(x^\mathsf{T} w)$.

Старейший алгоритм онлайнового обучения (правило Хебба):

инициализировать параметры модели $w_0 := 0$;
для всех $i = 1, \ldots, \ell$
  получить x_i; предсказать $a_i := \text{sign}(x_i^\mathsf{T} w_{i-1})$; получить y_i;
  если $a_i \neq y_i$ **то**
    обновить модель $w_i := w_{i-1} + \eta y_i x_i$;

Это эквивалентно градиентному шагу
с функцией потерь $\mathscr{L}_i(w) = (-y_i x_i^\mathsf{T} w)_+$
и величиной шага η

Вариант с нормализацией: $w_i := w_{i-1} + \eta y_i \frac{x_i}{\|x_i\|}$



Frank Rosenblatt. The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain. 1958.

Алгоритм Passive-Aggressive для линейного классификатора

$\mathscr{L}_i(w) = (1 - y_i x_i^{\mathsf{T}} w)_+$ — функция потерь как в SVM

Идея: w_i = проекция w_{i-1} на множество $\{w : \mathscr{L}_i(w) = 0\}$
passive — если $\mathscr{L}_i(w_{i-1}) = 0$, то не менять веса, $w_i := w_{i-1}$
aggressive — сдвинуться как можно дальше к $\{w : \mathscr{L}_i(w) = 0\}$

Задача поиска точки w_i, с параметром C и степенью $p \in \{1, 2\}$:

$$\|w - w_{i-1}\|^2 + C\mathscr{L}_i^p(w) \to \min_w$$

Аналитическое решение даёт значение градиентного шага η_i:

$$w_i := w_{i-1} + \eta_i y_i x_i$$

$$\underbrace{\eta_i = \frac{\mathscr{L}_i}{\|x_i\|^2}}_{\text{при } C=0} \quad \text{или} \quad \underbrace{\eta_i = \min\left\{C, \frac{\mathscr{L}_i}{\|x_i\|^2}\right\}}_{\text{при } p=1} \quad \text{или} \quad \underbrace{\eta_i = \frac{\mathscr{L}_i}{\|x_i\|^2 + \frac{1}{2C}}}_{\text{при } p=2}$$

K.Crammer et al. Online passive-aggressive algorithms. JMRL, 2006.

Онлайновый градиентный спуск (Online Gradient Descent, OGD)

Минимизация аддитивного критерия

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mathscr{L}\big(a(x_i, w), y_i\big) \to \max_w$$

Отличие от метода SGD (Stochastic Gradient Descent) в том, что объекты следуют в заданном порядке, а не в случайном:

инициализировать параметры модели w_0;
для всех $i = 1, \ldots, \ell$
  получить объект x_i; предсказать $a_i := a(x_i, w_{i-1})$;
  получить ответ y_i; оценить потерю $\mathscr{L}_i := \mathscr{L}(a_i, y_i)$;
  обновить модель $w_i := w_{i-1} - \eta_i \nabla_w \mathscr{L}\big(a(x_i, w_{i-1}), y_i\big)$;

M.Zinkevich. Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent. 2003.

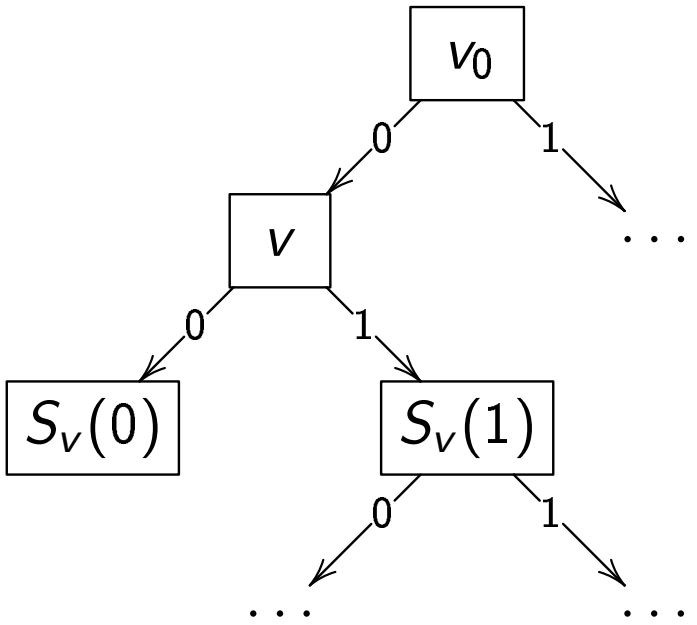
Напоминание. Решающее дерево (Decision Tree)

$\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — множество признаков, $f_j : X \to Ef_j$, $|Ef_j| < \infty$

Решающее дерево — алгоритм классификации $a(x)$, задающийся *деревом* (связным ациклическим графом):

1) $V = V_{\text{внутр}} \sqcup V_{\text{лист}}$, $v_0 \in V$ — корень дерева;
2) $v \in V_{\text{внутр}}$: признак $f_v \in \mathscr{F}$ и функция $S_v : Ef_v \to V$;
3) $v \in V_{\text{лист}}$: метка класса $y_v \in Y$.

$v := v_0$;
пока $(v \in V_{\text{внутр}})$:
  $v := S_v(f_v(x))$;
выход $a(x) := y_v$;



Если $Ef_v \equiv \{0, 1\}$ для всех v, то решающее дерево бинарное

Напоминание. Алгоритм обучения решающего дерева ID3

$v_0 := \text{TreeGrowing}\,(X^\ell)$ — функция рекурсивно вызывает себя

функция $\text{TreeGrowing}\,(U \subseteq X^\ell) \mapsto$ корень дерева v;
$f_v := \arg\max\limits_{f \in \mathscr{F}} \text{Gain}\,(f, U)$ — критерий ветвления дерева;
если $\text{Gain}\,(f_v, U) < G_0$ **то**
  создать новый лист v; $y_v := \text{Major}\,(U)$; **выход** v;
создать новую внутреннюю вершину v с функцией f_v;
для всех $k \in Ef_v$:
  $U_{vk} := \{x \in U : f_v(x) = k\}$;
  $S_v(k) := \text{TreeGrowing}\,(U_{vk})$;
выход v;

Мажоритарное правило: $\text{Major}\,(U) := \arg\max\limits_{y \in Y} P(y|U)$.

John Ross Quinlan. Induction of Decision Trees // Machine Learning, 1986.

Инкрементный алгоритм обучения решающего дерева ID5R

U_v — множество объектов (x_i, y_i), дошедших до вершины v.

$C_v[j, z, y] = \#\{x_i \in U_v : y_i = y, f_j(x_i) = z\}$ — счётчики числа объектов для вычисления критерия ветвления $\text{Gain}(f_j, U_v)$.

для всех $i = 1, \ldots, \ell$:
  получить x_i; предсказать a_i; получить y_i;
  для всех v на пути от v_0 до листа, в который попал x_i:
    $C_v[j, f_j(x_i), y_i]$ += 1 для всех $j = 1, \ldots, n$;
    $f'_v := \arg\max_f \text{Gain}(f, U_v)$ — критерий ветвления;
    если $(\text{Gain}(f'_v, U_v) > G_0)$ и $(v \in V_{\text{лист}})$ **то**
      преобразовать v во внутреннюю вершину;
    если $(f'_v \neq f_v)$ и $(v \in V_{\text{внутр}})$ **то**
      $v := \text{TreeGrowing}(U_v)$; $f_v := f'_v$;

Paul E. Utgoff. Incremental Induction of Decision Trees. 1989

Преимущества и недостатки

Преимущества:

- хранится не выборка, а счётчики
- дерево растёт постепенно с ростом объёма данных
- решения онлайна (ID5R) и оффлайна (ID3) совпадают
- есть несколько версий более продвинутого алгоритма IDI

Недостатки:

- большой объём хранимых данных
- из-за этого большой лес из ID5R построить трудно

P.E.Utogff, N.C.Berkman, J.A.Clouse. Decision tree induction based on efficient tree restructuring. 1996

P.E.Utogff. An improved algorithm for incremental induction of decision trees. 1994

Рекурсивный метод наименьших квадратов (RLS)

Пусть $x_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \mathbb{R}$; модель регрессии $a(x, w) = x^\mathsf{T} w$.
Метод наименьших квадратов (МНК) для линейной регрессии:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left(x_i^\mathsf{T} w - y_i\right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j^2 = \|Fw - y\|^2 + \lambda \|w\|^2 \to \min_w$$

Решение задачи МНК (гребневая регрессия):

$$w^* = (F^\mathsf{T} F + \lambda I_n)^{-1} F^\mathsf{T} y$$

Новый объект x_i добавляется нижней строкой к F_{i-1}:

$$F_i^\mathsf{T} F_i = \left(F_{i-1}^\mathsf{T} \; x_i\right) \begin{pmatrix} F_{i-1} \\ x_i^\mathsf{T} \end{pmatrix} = F_{i-1}^\mathsf{T} F_{i-1} + x_i x_i^\mathsf{T}$$

Формула Шермана–Моррисона для матрицы $A = F_{i-1}^\mathsf{T} F_{i-1} + \lambda I_n$:

$$(A + uv^\mathsf{T})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} uv^\mathsf{T} A^{-1}}{1 + v^\mathsf{T} A^{-1} u}$$

Рекурсивный метод наименьших квадратов (RLS)

Рекурсивный МНК (Recursive Least Squares):

инициализировать $w_0 := 0$, $A_0 := (I_n + \lambda I_n)^{-1}$;
для всех $i = 1, \ldots, \ell$
- получить объект x_i; сделать предсказание $a_i := x_i^{\mathsf{T}} w_{i-1}$;
- получить ответ y_i; оценить потерю $\mathscr{L}_i := (a_i - y_i)^2$;
- $A_i := A_{i-1} - \dfrac{A_{i-1} x_i x_i^{\mathsf{T}} A_{i-1}}{1 + x_i^{\mathsf{T}} A_{i-1} x_i}$;
- $w_i := w_{i-1} - A_i x_i (a_i - y_i)$;

Сложность $O(\ell n^2)$, решение точное, совпадает с оффлайном

Сравнение с OGD:

$$w_i := w_{i-1} - \eta_i x_i (a_i - y_i)$$

Сложность $O(\ell n)$, решение приближённое, отличается от оффлайна

Задача прогнозирования временного ряда

$y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots$ — временной ряд, $y_i \in \mathbb{R}$

$x_t = (y_1, \ldots, y_t)$ — описание предыстории ряда в момент t

$\hat{y}_{t+d}(x_t; w)$ — модель временного ряда, $d = 1, \ldots, D$

w — вектор параметров, D — горизонт прогнозирования

Пример: линейная модель авторегрессии

$$\hat{y}_{t+1}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_{t-j+1}, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

Метод наименьших квадратов:

$$Q_t(w) = \sum_{i=t_0}^{t-d} \left(\hat{y}_{i+d}(x_i, w) - y_{i+d}\right)^2 \quad \to \quad \min_w$$

Основные явления в эконометрических временных рядах:

- тренды
- сезонности
- разладки (моменты смены модели ряда)

Экспоненциальное скользящее среднее (ЭСС)

Простейшая регрессионная модель — константа $\hat{y}_{t+1} = c$, наблюдения учитываются с весами, убывающими в прошлое:

$$\sum_{i=0}^{t} \beta^{t-i}(y_i - c)^2 \to \min_c, \quad \beta \in (0,1)$$

Аналитическое решение — формула Надарая-Ватсона:

$$c \equiv \hat{y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=0}^{t} \beta^i y_{t-i}}{\sum_{i=0}^{t} \beta^i}$$

Запишем аналогично $\hat{y}_t$, оценим $\sum_{i=0}^{t} \beta^i \approx \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \frac{1}{1-\beta}$,

получим $\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t\beta + (1-\beta)y_t$, заменим $\alpha = 1 - \beta$:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) \quad = \quad \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t,$$

$\alpha \in (0,1)$ называется параметром сглаживания.

Рекуррентная формула для среднего арифметического

Экспоненциальное скользящее среднее (ЭСС):

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t)$$

Среднее арифметическое:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{t+1}\sum_{i=0}^{t} y_i = \hat{y}_t + \frac{1}{t+1}(y_t - \hat{y}_t)$$

При $\alpha_t = \frac{1}{t+1}$ имеем среднее арифметическое
При $\alpha_t = \text{const}$ имеем экспоненциальное скользящее среднее

Условие сходимости к среднему (для стационарных задач):

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \infty, \qquad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty$$

ЭСС применяется к нестационарным временным рядам

Подбор параметра сглаживания

Экспоненциальное скользящее среднее (ЭСС):

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t$$

Чем больше α, тем больше вес последних точек,
при $\alpha \to 1$ прогноз стремится к тривиальному $\hat{y}_{t+1} = y_t$.

Чем меньше α, тем сильнее сглаживание,
при $\alpha \to 0$ прогноз стремится к тривиальному $\hat{y}_{t+1} = \bar{y}$.

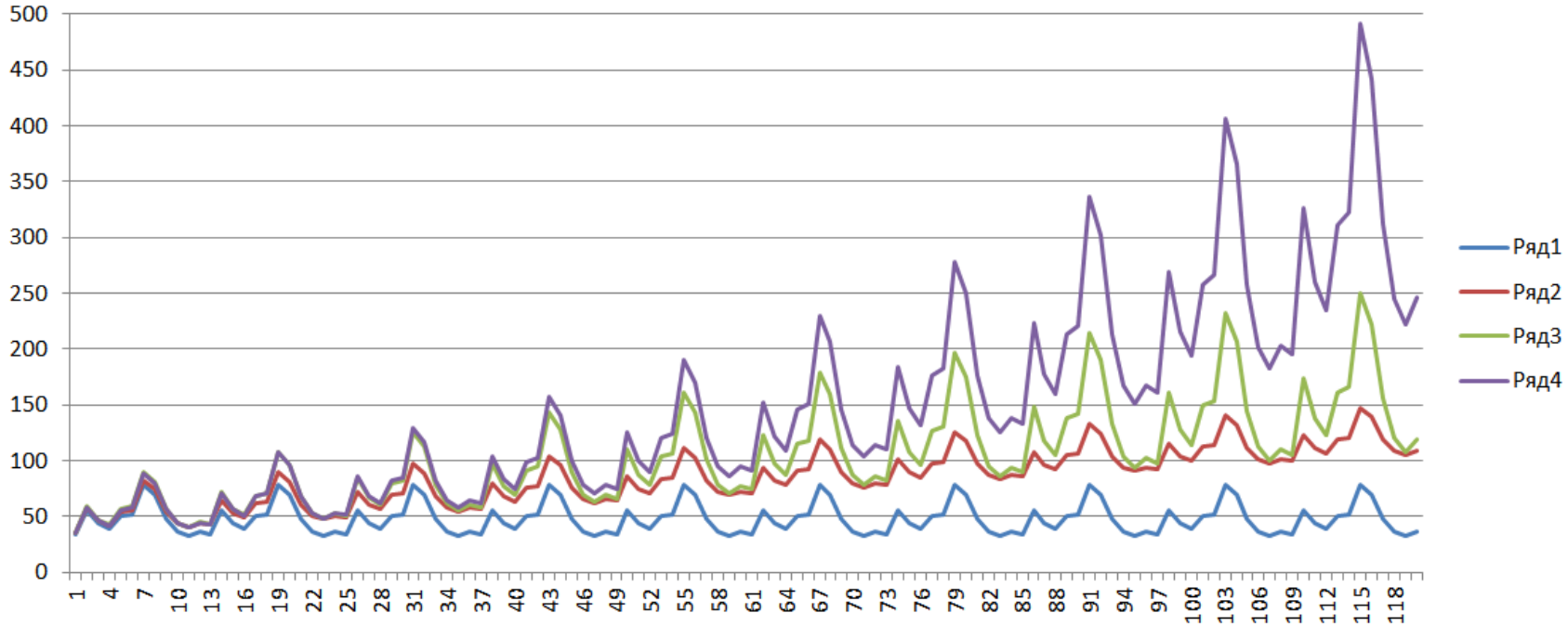
Оптимальное α^* находим по скользящему контролю:

$$Q(\alpha) = \sum_{t=t_0}^{T} \big(\hat{y}_t(\alpha) - y_t\big)^2 \to \min_{\alpha}$$

Эмпирические правила:
если $\alpha^* \in (0, 0.3)$, то ряд стационарен, ЭСС работает;
если $\alpha^* \in (0.3, 1)$, то ряд нестационарен, нужна модель тренда.

Временные ряды с трендом и сезонностью

Пример. Сочетания тренда и сезонности (модельные данные)



Ряд 1 — сезонность без тренда
Ряд 2 — линейный тренд, аддитивная сезонность
Ряд 3 — линейный тренд, мультипликативная сезонность
Ряд 4 — экспоненциальный тренд, мультипликативная сезонность

Аддитивный тренд и сезонность

Модель Хольта: $\hat{y}_{t+d} = a_t + b_t d$

Рекуррентные формулы для параметров линейного тренда:

$$a_t = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1})$$
$$b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) b_{t-1}$$

Модель Тейла–Вейджа: $\hat{y}_{t+d} = (a_t + b_t d) + \theta_{t+d-s}, \quad d \leqslant s$

Линейный тренд и аддитивная сезонность с периодом s:

$$a_t = \alpha_1 (y_t - \theta_{t-s}) + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1})$$
$$b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) b_{t-1}$$
$$\theta_t = \alpha_3 (y_t - a_t) + (1 - \alpha_3) \theta_{t-s}$$

$\theta_0, \ldots, \theta_{s-1}$ — сезонный профиль периода s

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — параметры сглаживания

Мультипликативный тренд и сезонность

Модель Уинтерса: $\hat{y}_{t+d} = (a_t + b_t d) \cdot \theta_{t+d-s}, \quad d \leqslant s$

Линейный тренд и мультипликативная сезонность периода s:

$$a_t = \alpha_1 (y_t / \theta_{t-s}) + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1});$$
$$b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) b_{t-1};$$
$$\theta_t = \alpha_3 (y_t / a_t) + (1 - \alpha_3) \theta_{t-s};$$

Модель Уинтерса: $\hat{y}_{t+d} = a_t \cdot r_t^d \cdot \theta_{t+d-s}, \quad d \leqslant s$

Мультипликативные тренд и сезонность периода s:

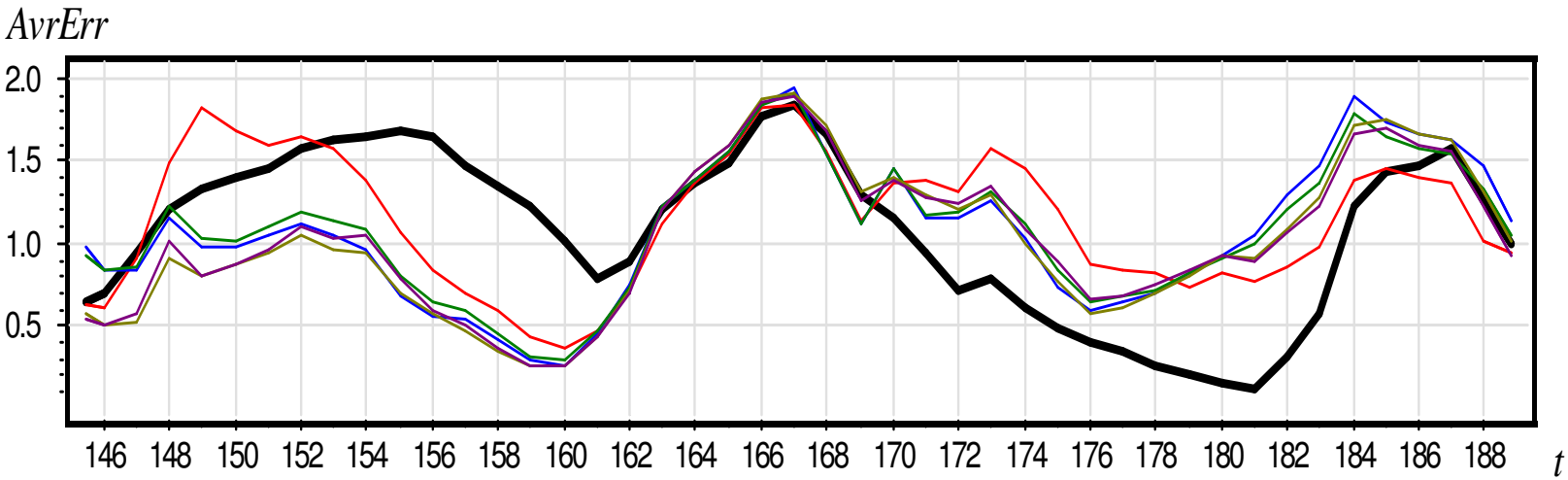
$$a_t = \alpha_1 (y_t / \theta_{t-s}) + (1 - \alpha_1) a_{t-1} r_{t-1};$$
$$r_t = \alpha_2 (a_t / a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) r_{t-1};$$
$$\theta_t = \alpha_3 (y_t / a_t) + (1 - \alpha_3) \theta_{t-s};$$

$\theta_0, \ldots, \theta_{s-1}$ — сезонный профиль периода s

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — параметры сглаживания

Идея адаптивной селекции моделей

Пример: Динамика ЭСС ошибок прогнозов $|\varepsilon_t|$ для 6 моделей (по реальным данным объёмов продаж в супермаркете):



Идея: кажется, можно успевать включать наиболее удачные модели и отключать менее удачные...

Разладка — момент времени, когда временной ряд переключается с одной модели поведения на другую

Адаптивная селективная модель

Пусть имеется k моделей прогнозирования,

$\hat{y}_{j,t+d}$ — прогноз j-й модели на момент $t+d$

$\varepsilon_{jt} = y_t - \hat{y}_{jt}$ — ошибка прогноза j-й модели в момент t

$\tilde{\varepsilon}_{jt} = \gamma|\varepsilon_{jt}| + (1-\gamma)\tilde{\varepsilon}_{j,t-1}$ — ЭСС модуля ошибки

Лучшая модель в момент времени t:

$$j_t^* = \arg\min_{j=1,\ldots,k} \tilde{\varepsilon}_{jt}$$

Адаптивная селективная модель — прогноз по лучшей модели:

$$\hat{y}_{t+d} := \hat{y}_{j_t^*,t+d}$$

Требуется подбор γ, рекомендация: $\gamma = 0.01 \ldots 0.1$.

Ю.П.Лукашин. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. 2003.

Адаптивная композиция моделей

Пусть имеется k моделей прогнозирования,
$\hat{y}_{j,t+d}$ — прогноз j-й модели на момент $t+d$
$\varepsilon_{jt} = y_t - \hat{y}_{jt}$ — ошибка прогноза j-й модели в момент t
$\tilde{\varepsilon}_{jt} = \gamma|\varepsilon_{jt}| + (1-\gamma)\tilde{\varepsilon}_{j,t-1}$ — ЭСС модуля ошибки

Линейная (выпуклая) комбинация моделей:

$$\hat{y}_{t+d} = \sum_{j=1}^{k} w_{jt}\hat{y}_{j,t+d}, \qquad \sum_{j=1}^{k} w_{jt} = 1, \quad \forall t.$$

Адаптивный подбор весов [Лукашин, 2003]:

$$w_{jt} = \frac{(\tilde{\varepsilon}_{jt})^{-1}}{\sum_{s=1}^{k}(\tilde{\varepsilon}_{st})^{-1}}.$$

Требуется подбор γ, рекомендация: $\gamma = 0.01 \ldots 0.1$.

Ю.П.Лукашин. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. 2003.

Онлайновое обучение ансамбля: алгоритм Hedge(β)

$b_t(x) \in [0,1]$, $t = 1, \ldots, T$ — [обучаемые] базовые предикторы
$\mathscr{L}(b, y) \in [0,1]$ — выпуклая по b функция потерь
$\beta \in (0,1)$ — параметр основания степени (β^z убывает по z)
В бустинге фиксируем ℓ, наращиваем T, а в Hedge — наоборот!

инициализировать веса предикторов $w_{0t} = \frac{1}{T}$, $t = 1, \ldots, T$;
для всех $i = 1, \ldots, \ell$
- получить очередной объект x_i;
- сделать предсказания $b_t(x_i)$, $t = 1, \ldots, T$;
- получить ответ y_i и оценить потери $\mathscr{L}_{it} := \mathscr{L}(b_t(x_i), y_i)$;
- обновить веса предикторов: $w_{it} := \underset{t}{\operatorname{norm}}\left(w_{i-1,t}\, \beta^{\mathscr{L}_{it}}\right)$;
- дообучить предикторы b_t, $t = 1, \ldots, T$ на (x_i, y_i);

Yoav Freund, Robert E. Schapire. A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. 1997

Финансовая интерпретация алгоритма Hedge(β)

Задача портфельного инвестора (Online Portfolio Selection):

b_t — финансовые инструменты или стратегии (equity)

$\mathscr{L}_{it}$ — потеря от инструмента t в момент времени i

w_{it} — доля капитала в инструменте t в момент времени i

$\mathscr{L}_i = \sum_{t=1}^{T} w_{it}\mathscr{L}_{it}$ — потеря по всему портфелю в момент i

Теорема

Для любых $\mathscr{L}_{it} \in [0,1]$ потеря ансамбля не сильно хуже потери лучшего из предикторов и стремится к ней при $\ell \to \infty$:

$$\frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\mathscr{L}_i \leqslant \min_t \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\mathscr{L}_{it} + \sqrt{\frac{2\ln T}{\ell}} + \frac{\ln T}{\ell}$$

Интерпретация: доходность портфеля стремится к доходности лучшего из инструментов при $\ell \to \infty$ со скоростью $O\left(\sqrt{\frac{\ln T}{\ell}}\right)$

Свойства алгоритма Hedge(β)

- Теорема справедлива для любых $\mathscr{L}_{it} \in [0,1]$, без каких-либо вероятностных предположений
- Та же оценка верна и для средних потерь ансамбля в силу выпуклости функции потерь и нормировки w_{it}:

$$\mathscr{L}\left(\sum_{t=1}^{T} w_{it} b_t(x_i), y_i\right) \leqslant \sum_{t=1}^{T} w_{it} \mathscr{L}\left(b_t(x_i), y_i\right) = \mathscr{L}_i$$

- Чем меньше β, тем быстрее обучается ансамбль
- Можно оценить β, минимизировав более точную оценку:

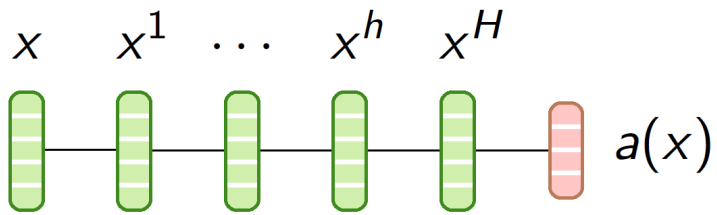
$$\sum_i \mathscr{L}_i \leqslant \frac{-L \ln \beta + \ln T}{1-\beta} \to \min_\beta, \text{ где } L = \min_t \sum_i \mathscr{L}_{it} \leqslant \ell$$

Yoav Freund, Robert E. Schapire. A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. 1997

Онлайновое глубокое обучение

Сеть для многоклассовой классификации с H слоями, $a = (a_y)_{y \in Y}$:

$$x^0 = x$$
$$x^h = \sigma(W^h x^{h-1})$$
$$a(x) = \mathrm{SoftMax}_y(V x^H)$$



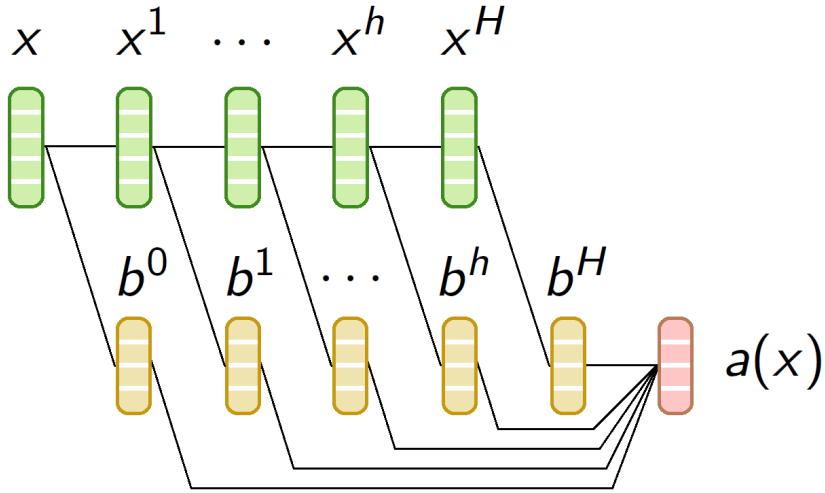
Проблема: как обучить все слои, пока данных мало?

После каждого слоя h будем строить классификатор $b^h(x)$:

$$x^0 = x$$
$$x^h = \sigma(W^h x^{h-1})$$
$$b^h(x) = \mathrm{SoftMax}_y(V^h x^h)$$

линейный ансамбль с весами w_h:

$$a(x) = \sum_{h=0}^{H} w_h b^h(x^h)$$



D.Sahoo et al. Online deep learning: learning deep neural networks on the fly. 2018

Обратное распространение ошибки: Hedge BackProp

- Веса ансамбля w_h вычисляются алгоритмом Hedge(β)
- Функция потерь — многоклассовый log-loss:

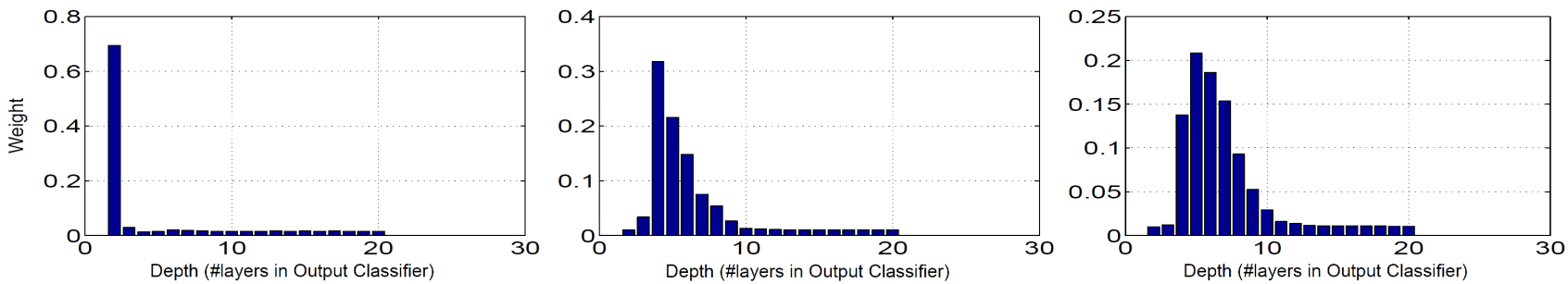
$$\mathscr{L}_i(a(x_i), y_i) = \sum_{y \in Y} [y_i = y] \ln a_y(x_i) + [y_i \neq y] \ln\big(1 - a_y(x_i)\big)$$

- Особенности градиентных шагов в OGD:

$$V^h := V^h - \eta w_h \nabla_{V^h} \mathscr{L}_i(b^h(x_i), y_i)$$

$$W^h := W^h - \eta \sum_{j=h}^{H} w_j \nabla_{W^j} \mathscr{L}_i(b^j(x_i), y_i)$$

- Hedge включает слои постепенно с ростом объёма данных:



(a) First 0.5% of Data (b) 10-15% of Data (c) 60-80% of Data

D.Sahoo et al. Online deep learning: learning deep neural networks on the fly. 2018

Резюме

- Потоковых данных становится всё больше, в перспективе всё машинное обучение должно стать инкрементным
- Инкрементные модификации существуют для большинства методов машинного обучения
- Не существует универсальных рецептов, как из обычного (оффлайнового) метода сделать онлайновый
- Инкрементные методы могут быть:
  — онлайновые или пакетные
  — точные или приближённые в сравнении с оффлайном
  — с изменяемой или неизменной сложностью модели
  — с хранением части выборки (эталонов) или без него
  — с теоретическими гарантиями или без них
  — с возможностью декремента или без него
- Deep Online Learning — активное развивающееся новое направление, охотно заимствующее идеи старых методов

Steven C. H. Hoi et al. Online learning: a comprehensive survey. 2018